

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Нововоронежский политехнический институт –

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

(НВПК НИЯУ МИФИ)

УТВЕРЖДЕН:

Педагогическим советом

«17» *марта* 2023г., протокол № *550*

ФОНД

ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
НАЧАЛА АНАЛИЗА»**

Направление подготовки: 27.03.04 Управление в технических системах

Наименование образовательной программы бакалавриата: Управление и информатика в технических системах

Уровень образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Нововоронеж 2022 г.

1. Паспорт фонда оценочных средств

1.1. Модели контролируемых компетенций:

Оценочные средства для контроля по дисциплине направлены на проверку знаний и умений студентов, являющихся основой формирования у обучающихся следующих компетенции:

ОПК-1 Способен анализировать задачи профессиональной деятельности на основе положений, законов и методов в области естественных наук и математики

3-ОПК-1 Знать: принципы построения систем управления

У-ОПК-1 Уметь: анализировать задачи управления в технических системах

ОПК-1 Владеть: базовыми знаниями о типовых технических средствах автоматизации и управления

УКЕ-1 Способен использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в поставленных задачах

3-УКЕ-1 знать: основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования

У-УКЕ-1 уметь: использовать математические методы в технических приложениях, рассчитывать основные числовые характеристики случайных величин, решать основные задачи математической статистики; решать типовые расчетные задачи

В-УКЕ-1 владеть: методами математического анализа и моделирования; методами решения задач анализа и расчета характеристик физических систем, основными приемами обработки экспериментальных данных, методами работы с прикладными программными продуктами

1.2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства		
			текущий контроль успеваемости (неделя, форма)	аттестация раздела (неделя, форма)	Промежуточная аттестация
1	Линейная и векторная алгебра.	ОПК-1 УКЕ-1	3КР	5КР	УО по билетам
2	Аналитическая геометрия.	ОПК-1 УКЕ-1	9КР	10ИДЗ	УО по билетам
3	Введение в математический анализ.	ОПК-1 УКЕ-1	12Т	13КР	УО по билетам
4	Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	ОПК-1 УКЕ-1	14 Т	17КР	УО по билетам

КР – контрольная работа; Т – тест; ИДЗ – индивидуальное домашнее задание; УО – устный опрос.

1.3. Основные показатели оценивания компетенций:

Соотнесение формируемых компетенций со знаниями, умениями и навыками приведено в следующей таблице:

Индекс компетенции	Проектируемые результаты освоения дисциплины «Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Начала анализа» и индикаторы формирования компетенций			Средства и технологии оценки
	Знания (З)	Умения (У)	Навыки (В)	
ОПК-1 УКЕ-1	3 1, 32,	У1,У-2	В1	ИДЗ, Т, КР,УО по билетам

Основные показатели оценивания знаний, умений и навыков, необходимых для формирования компетенций, представлены в таблице:

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Основные показатели оценки результатов	Формируемые компетенции
З1 - определения, теоремы и инструменты всех разделов линейной алгебры, аналитической геометрии, начал анализа;	<p>Определения матриц, выполнение операций над матрицами. Определения определителей, вычисление определителей, миноров, алгебраических дополнений, обратной матрицы. Определение линейного пространства, линейной зависимости и независимости векторов, размерности пространства. Евклидово пространство, определение скалярного произведения, векторного произведения, смешанного произведения. Уравнение поверхности тел. Определения кривых второго порядка, вывод уравнений кривых второго порядка. Уравнение плоскости по заданным элементам. Уравнение прямой в пространстве и на плоскости по заданным элементам. Определение множества, операций над множествами. Функция, ее свойства. Определение числовой последовательности, сходимости последовательности, свойства последовательностей. Предел последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Существование предела у монотонной последовательности. Ограниченность последовательности, имеющей предел. Предел функции. Единственность предела. Бесконечно малые функции. Теоремы о пределах. Композиция (суперпозиция) функций. Теоремы о предельном переходе в неравенствах. Сравнение бесконечно малых. Обратные функции. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Теоремы о непрерывных функциях.</p> <p>Производная, ее свойства. Производная сложной функции, обратной, заданной параметрически, неявно. Связь между непрерывностью функции и существованием производной. Геометрический, механический смысл производной. Лога-</p>	ОПК-1 УКЕ-1

	рифмическое дифференцирование. Определение дифференциала.	
32 - основные методы линейной алгебры, аналитической геометрии, начал анализа.	<p>Нахождение обратных матриц. Методы решения систем линейных уравнений. Доказательство линейной зависимости и независимости линейных векторов, базиса линейного пространства. Разложение вектора по базисным. Вычисление углов, площадей поверхности и объемов тел. Вычисление углов между векторами, прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями. Запись уравнений плоскости и прямой по заданным элементам. Вычисление пределов последовательности и функции. Вычисление производных по определению, производной элементарных функций, по правилам вычисления производных, логарифмическим дифференцированием, производной сложной функции, обратной, заданной неявно, параметрически. Нахождение подмножеств, объединений и пересечений множеств. Построение графиков функций, ее свойства. Вычисление предела последовательности. Вычисление предела функции, в том числе с помощью замечательных пределов, правила Лопиталья. Доказательство непрерывности функции, определение точек разрыва и их классификация. Вычисление производной с помощью определения и таблицы. Находить производную сложной функции, обратной, заданной параметрически, не явно. Записывать уравнение касательной, нормали, находить скорость, ускорение. Применять понятие дифференциала к приближенным вычислениям.</p>	ОПК-1 УКЕ-1
У1- решать типовые математические задачи	<p>Находить обратные матрицы. Решать системы линейных уравнений. Доказывать линейную зависимость и независимость линейных векторов, находить базис линейного пространства. Раскладывать вектор по базисным. Вычислять углы, площади поверхности и объемы тел. Вычислять углы между векторами, прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями. Записывать уравнения плоскости и прямой по заданным элементам. Находить подмножества, объединений и пересечений множеств. Строить графиков функций. Вычислять пределы последовательности и функции, в том числе с помощью замечательных пределов, правила Лопиталья. Вычислять производные по определению, производные элементарных функций, по правилам вычисления производных, логарифмическому дифференцированию, производную сложной функции, обратной, заданной неявно, параметрически. Доказательство непрерывности функции, определение точек разрыва и их классификация. Записывать уравнение касательной, нормали, находить скорость, ускорение. Применять понятие дифференциала к приближенным вычислениям.</p>	ОПК-1 УКЕ-1

У2 - самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по прикладным наукам, расширять свои математические познания.	Уметь решать математические задачи из числа общеинженерных и специальных дисциплин	ОПК-1 УКЕ-1
В1 - первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин	Владеть методами решения всех выше перечисленных типовых задач при решении математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин	ОПК-1 УКЕ-1

2. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для оценки знаний, умений, навыков по дисциплине

Типовые контрольные задания представлены в соответствии с перечнем оценочных средств по дисциплине в следующей структуре:

- методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций;
- сами оценочные средства ;
- критерии и шкалы оценивания.

2.1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ВХОДНОГО КОНТРОЛЯ

Педагогический анализ уровня знаний студентов первого курса, полученных на базе среднего общего образования, проводится по единым тестам НИИ мониторинга качества образования через интернет-портал <http://diag.i-exam.ru/> по следующей обобщенной структуре измерительных материалов:

№ п/п	Наименование темы	Перечень учебных элементов
1	Степени и корни	знать: понятие корня n-ой степени уметь: выполнять тождественные преобразования с корнями и находить их значение
2	Тождественные преобразования алгебраических выражений	знать: правила выполнения тождественных преобразований рациональных выражений, разложение квадратного трехчлена на линейные

		множители уметь: раскладывать квадратный трехчлен на линейные множители, выполнять тождественные преобразования рациональных выражений
3	Преобразования тригонометрических выражений	знать: формулы приведения, значения тригонометрических функций основных углов уметь: выполнять простейшие преобразования тригонометрических выражений
4	Тождественные преобразования логарифмических выражений	знать: понятие логарифма, свойства логарифмов уметь: выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений, применять свойства логарифмов
5	Задачи из практической деятельности и повседневной жизни	знать: способы представления данных, полученных из практических задач уметь: использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни
6	Текстовая задача	знать: методы решения текстовых задач уметь: строить и исследовать простейшие математические модели
7	Уравнения с переменной под знаком модуля	знать: методы решения уравнений с переменной под знаком модуля уметь: решать простейшие уравнения с переменной под знаком модуля
8	Иррациональные уравнения	знать: приемы решения иррациональных уравнений уметь: решать иррациональные уравнения
9	Логарифмические уравнения	знать: методы решения логарифмических уравнений уметь: решать простейшие логарифмические уравнения
10	Тригонометрические уравнения	знать: общие формулы решения простейших тригонометрических уравнений уметь: решать простейшие тригонометрические уравнения
11	Системы линейных уравнений	знать: методы решения систем линейных уравнений уметь: решать системы линейных уравнений с двумя неизвестными
12	Квадратные неравенства	знать: приемы решения неравенств второй степени уметь: решать неравенства второй степени
13	Показательные неравенства	знать: способы решения показательных и логарифмических неравенств уметь: решать показательные и логарифмические неравенства
14	Область определения функции	знать: определения элементарных функций уметь: находить области определения элементарных функций
15	Графики элементарных функций	знать: графики элементарных функций уметь: определять по графику соответствующую ему функцию

16	Производная функции	<i>знать:</i> формулы и правила нахождения производных <i>уметь:</i> находить производные элементарных функций
17	Решение прямоугольных треугольников	<i>знать:</i> соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника <i>уметь:</i> находить элементы прямоугольного треугольника
18	Применение геометрических знаний для решения практических задач	<i>знать:</i> формулы для нахождения поверхностей и объемов многогранников и круглых тел <i>уметь:</i> применять геометрические знания для решения практических задач

Критерии и шкала оценивания:

Критерий оценивания – процент правильно выполненных заданий, в соответствии с которым определяется уровень подготовки группы и отдельных студентов по следующей шкале:

Процент правильно выполненных заданий	Уровни усвоения
[70%-100%]	высокий
[40%-59%]	не высокий
[0%-39%]	низкий

2.2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

РАЗДЕЛ № 1 «Линейная и векторная алгебра»

Контрольная работа № 1 (ЗКР, 5б.)

Вариант 1

1) Даны матрицы A и B , числа α и β .

Вычислить: а) $A \cdot B$; б) $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ в)

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \alpha = 2; \beta = 3$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3+1 & 0+0+0 & 0+4+0 \\ 2+0+1 & 0+0+1 & 0+0+1 \\ 0+3+1 & 0+0+1 & 0+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 12 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 13 & 0 & 14 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^* \Delta = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера $\begin{cases} 2x + 5y + z = 8, \\ 3x - y + 2z = 3, \\ x + y - 2z = 5. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-2) - 5(-6-2) + 1(3+1) = 44$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 8(2-2) - 5(-6-10) + (3+5) = 88$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(-6-10) - 8(-6-2) + 15-3 = 44$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5-3) - 5(15-3) + 8(3+1) = -44$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{88}{44} = 2 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{44}{44} = 1 \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-44}{44} = -1$$

Ответ: $x=2; y=1; z=-1$

3) Найти C из уравнения: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & c \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2(0+1) + 2(6+5) + c(3-0) = 0; \quad 3c = -24; \quad c = -8.$$

Вариант 2

1) Даны матрицы A и B , числа α и β .

Вычислить: а) $A \cdot B$; б) $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ в) A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha = 3 \quad \beta = 2$$

Решение:

$$1) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+2 & 0+3+2 & 0+4+2 \\ 0+0+0 & 0+3+0 & 0+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 14 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^* \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Решить систему методом Крамера:
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 3, \\ 4x - y + 3z = 2, \\ x + y - 2z = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(2-3) - (-8-3) + (4+1) = 18$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(2-3) - 1(-4+3) + 2(2-1) = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-4+3) - 3(-8-3) + 2(-4-2) = 18$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-2) - 1(-4-2) + 3(4+1) = 18$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1 \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1$$

Ответ: $x=0; y=1; z=1$.

3) Найти c из уравнения:
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & c \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2(0+1) + 2(6+5) + c(3-0) = 0; \quad 3c = -24; \quad c = -8$$

Критерии оценки контрольной работы(30 мин.)

Правильно решенное 1 задание и вычислительные ошибки в остальных	3
Правильно решенные 2 задания и вычислительная ошибка в третьем	4
Правильно решенные 3 задания	5

Контрольная работа №2 (5КР, 5б.)

Вариант 1

Даны координаты вершины пирамиды $ABCD$: $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-1; 1; 1)$

Найдем а) угол φ между векторами \vec{AB} и \vec{CD} :

$$\vec{AB} = \{2-5; 5-2; 0\} = \{-3; 3; 0\}; \quad \vec{CD} = \{-1-1; 1-2; 1-4\} = \{-2; -1; -3\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{-3(-2) + 3(-1) + 0}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{6-3}{\sqrt{18} \sqrt{14}} = \frac{3}{3\sqrt{2} \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{28}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{28}}$$

б) площадь треугольника ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\vec{AC} = \{1-5; 2-2; 4\} = \{-4; 0; 4\}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 12\vec{j} + 12\vec{k} = \{12; 12; 12\}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = \frac{1}{2} 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (ед}^2\text{)}$$

в) объем пирамиды ABCD

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD} \right| \quad \vec{AD} = \{-6; -1; 1\}$$

$$[\vec{AB} \times \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -3(0+4) - 3(-4+24) = -12 - 60 = -72$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} |-72| = 12(e\partial^3)$$

г) высоту ΔABC , опущенную из вершины C: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h$

$$h = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = 2\sqrt{6}$$

д) высоту пирамиды ABCD, опущенную из вершины D: $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot H$

$$H = \frac{3V_{\text{пирамиды}}}{S_{\text{основания}}} = \frac{3 \cdot 12}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Вариант 2

Даны координаты вершины пирамиды ABCD: A(1;3;0), B(4;-1;2), C(3;0;1), D(-4; 3; 5)

Найдем: а) угол φ между векторами \vec{AB} и \vec{CD} :

$$\vec{AB} = \{4-1; -1-3; 2-0\} = \{3; -4; 2\}; \quad \vec{CD} = \{-4-3; 3-0; 5-1\} = \{-7; 3; 4\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{|3(-7) + (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} \sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{|-21 - 12 + 8|}{\sqrt{29} \sqrt{74}} = \frac{|-25|}{\sqrt{29} \sqrt{74}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{25}{\sqrt{29} \sqrt{74}}$$

б) площадь треугольника ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\vec{AC} = \{3-1; 0-3; 1-0\} = \{2; -3; 1\}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \{2; 1; -1\}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{6} \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{6} (e\partial^2)$$

в) объем пирамиды ABCD

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD} \right| \quad \vec{AD} = \{-4 - 1; 3 - 3; 5 - 0\} = \{-5; 0; 5\}$$

$$[\vec{AB} \times \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 3(-15 - 0) + 4(10 + 5) + 2(0 - 15) = -15$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} 15 = \frac{5}{2} = 2.5(e\delta^3)$$

г) высоту $\triangle ABC$, опущенную из вершины С: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h$

$$h = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{6}{29}}$$

д) высоту пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D: $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot H$

$$H = \frac{3V_{\text{пирамиды}}}{S_{\text{основания}}} = \frac{3 \cdot 2.5}{\frac{1}{2} \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot 5 \sqrt{6}}{6} = 2.5 \sqrt{6}.$$

Критерии оценки контрольной работы(30 мин.):

Правильно решенные 3 задания	3
Правильно решенные 4 задания	4
Правильно решенные все задания	5

РАЗДЕЛ № 2: «Аналитическая геометрия»

Контрольная работа (9КР, 10б.)

Вариант 1

Даны 3 точки $A(4;-1;3)$ $B(-2;1;0)$ $C(0;-5;1)$

Написать: 1) канонические и параметрические уравнения прямой AB

$$\frac{x-4}{-2-4} = \frac{y+1}{1+1} = \frac{z-3}{0-3}, \text{ канонические уравнения прямой: } \frac{x-4}{-6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

Параметрические уравнения прямой AB :
$$\begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = 2t - 1 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору \vec{BC} . $\vec{BC} = \{2;-6;1\}$ - вектор нормали к искомой плоскости, на которой лежит точка $A(4;-1;3)$. Уравнение плоскости имеет вид: $2(x-4)-6(y+1)+1(z-3)=0$
; $2x-6y+z-17=0$

3) уравнение плоскости ABC .

Пусть точка $M(x; y; z)$ - текущая точка плоскости.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AM} = \{x-4; y+1; z-3\} \\ \vec{AB} = \{-6; 2; -3\} \\ \vec{BC} = \{2; -6; 1\} \end{array} \right\} \text{компланарны} \Rightarrow \text{Условие компланарности } [\vec{AM} \times \vec{AB}] \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z-3 \\ -6 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (x-4) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)(2-18) - (y+1)(-6+6) + (z-3)(36-4) = 0 \quad \underline{x-2z+2=0}$$

уравнение плоскости ABC

4) Найти угол α между прямой $L: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 5z + 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью ABC.

Вектор нормали к плоскости ABC $\vec{N} = \{1; 0; -2\}$. Найдем направляющий вектор \vec{P} прямой L:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{N}_1 = \{2; -1; 1\} \\ \vec{N}_2 = \{1; 0; 5\} \end{array} \right\} \perp \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k} = \{-1; -9; 1\}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{P}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{P}|} = \frac{|-1+0-2|}{\sqrt{1^2+0+(-2)^2} \sqrt{(-1)^2+(-9)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{11}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{55}}$$

5) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; 1; -1)$ и прямую $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{3}$.

Решение: Из уравнения прямой следует, что точка $M_1(3; -1; 1)$, направляющий вектор прямой $\vec{P} = \{4; 0; 3\}$ и точка $M(x; y; z)$ лежат в искомой плоскости. Пусть точка $M(x; y; z)$ - текущая точка плоскости, тогда

$$\left. \begin{array}{l} \vec{M_0M} = \{x-2; y-1; z+1\} \\ \vec{M_1M_0} = \{-1; 2; -2\} \\ \vec{P} = \{4; 0; 3\} \end{array} \right\} \text{компланарны} \Rightarrow [\vec{M_0M} \times \vec{M_1M_0}] \cdot \vec{P} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad (x-2)(6-0) - (y-1)(-3+8) + (z+1)(0-8) = 0$$

$$2x - 5y - 8z - 15 = 0.$$

Вариант 2

Даны 3 точки $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$

Написать: 1) канонические и параметрические уравнения прямой АВ.

$$\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z+3}{0+3}, \text{ канонические уравнения прямой: } \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{3}.$$

Параметрические уравнения прямой АВ:
$$\begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases}$$

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору \vec{BC} . $\vec{BC} = \{-2;2;-2\}$ - вектор нормали к искомой плоскости, на которой лежит точка $A(4;-1;3)$. Уравнение плоскости имеет вид: $-2(x+1)+2(y-2)-2(z+3)=0$; $x-y+z+6=0$.

3) уравнение плоскости ABC.

Пусть точка $M(x;y;z)$ - текущая точка плоскости.

$$\left. \begin{aligned} \vec{AM} &= \{x+1; y-2; z+3\} \\ \vec{AB} &= \{5; -3; 3\} \\ \vec{BC} &= \{3; -1; 1\} \end{aligned} \right\} \text{компланарны} \Rightarrow \text{Условие компланарности } [\vec{AM} \times \vec{AB}] \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (x+1) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z+3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)(-3+3) - (y-2)(5-9) + (z+3)(-5+9) = 0 \quad \underbrace{y+z+1=0}_{\text{уравнение плоскости ABC}}$$

4) Найти угол α между прямой $L: \begin{cases} x+3y-z+2=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases}$ и плоскостью ABC.

Вектор нормали к плоскости ABC $\vec{N} = \{0;1;1\}$. Найдем направляющий вектор

\vec{P} прямой L:

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_1 &= \{1;3;-1\} \\ \vec{N}_2 &= \{1;-2;0\} \end{aligned} \right\} \perp \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = \{-2;-1;-5\}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{P}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{P}|} = \frac{|0-1-5|}{\sqrt{0+1+1} \sqrt{4+1+25}} = \frac{6}{\sqrt{2} \sqrt{30}} = \frac{6}{\sqrt{60}} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{6}{\sqrt{60}}$$

5) Написать уравнение плоскости α , проходящей через 2 параллельные прямые

$$L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-0}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Пусть точка $M(x; y; z)$ текущая точка плоскости. Вектор $\vec{P} = \{2; 1; -1\}$ направляющий вектор прямых.

$$\left. \begin{array}{l} M_1(-1; 2; 3) \\ M_2(0; -1; 2) \\ M(x; y; z) \end{array} \right\} \in \text{плоскости } \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \vec{M_1M} = \{x+1; y-2; z-3\} \\ \vec{M_1M_2} = \{1; -3; -1\} \\ \vec{P} = \{2; 1; -1\} \end{array} \right\} \text{компланарны}$$

Условие компланарности $[\vec{M_1M} \times \vec{M_1M_2}] \cdot \vec{P} = 0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad (x+1) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)(3+1) - (y-2)(-1+2) + (z-3)(1+6) = 0; \Rightarrow \underbrace{4x - y + 7z + 3 = 0}_{\text{плоскость } \alpha}$$

Критерии оценки контрольной работы(1 ч.):

Правильно решенные 3 задания	3
Правильно решенные 4 задания	4
Правильно решенные все задания	5

РАЗДЕЛ № 3: «Введение в математический анализ»

Тест (12Т, 5б.)

1. Значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n}}{3n + 1}$ равно...

- 1) $\frac{4}{3}$ 2) 1 3) $\frac{2}{3}$ 4) 2.

2. Значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7n^2 - 1}}{5n^3 + 4n^2 - 2n + 1}$ равно...

- 1) $\frac{\sqrt{7}}{5}$ 2) 0 3) $\frac{7}{4}$ 4) -1.

3. Значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 1}{5^n + 1}$ равно...

- 1) -1 2) 1 3) 0 4) 5.

4. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{2x-1} - \frac{x^2+2}{1-2x^2} \right)$ равно...

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) 0 3) 1 4) $\frac{5}{2}$.

5. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)^2}{5-3x+4x^2}$ равно...

- 1) 1 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{1}{2}$.

6. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ равно...

1) 2 2) 1 3) -1 4) 0.

7. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-3} - x \right)$ равно...

1) 1 2) 0 3) -1 4) $\frac{1}{3}$.

8. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} \right)$ равно...

1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{2}{3}$ 4) 2.

9. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$ равно...

1) $\frac{1}{3}$ 2) 5 3) 1 4) 2.

10. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ равно...

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) -1 4) 2.

11. Значение предела $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}$ равно...

1) 1 2) 0 3) $-\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$.

12. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$ равно...

1) 0 2) 2 3) $\frac{1}{2}$ 4) -1.

13. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$ равно... 1) 0 2) $\frac{4}{3}$

3) $\frac{1}{3}$ 4) 4.

14. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{5x}$ равно...

1) $\frac{2}{5}$ 2) 0 3) 1 4) 2.

15. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+5}$ равно...

1) 1 2) 0 3) e^{-1} 4) e .

Ключи к ответу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	2	2	1	3	2	2	3	1	2	2	2	1	3

Время выполнения: 45 мин

Критерии оценивания: 14-15 заданий -5 баллов

11-13 заданий – 4 балла

8-10 заданий – 3 балла.

Контрольная работа (13КР, 5б.)

Вариант 1

1. Вычислить пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^{4n-1}$ б)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\sqrt[7]{n}}{n^2+n+1}$ в) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2+2x}{4x^2+3x}$ при $x_0=2$; $x_0=0$; $x_0=\infty$

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^{4n-1} = \left[\left(1 + \frac{-2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{-2}} \right]^{\frac{-2(4n-1)}{2n-1}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\sqrt[7]{n}}{n^2+n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 0, \left\langle \begin{array}{l} \text{т.к. старшая степень числителя} = \frac{1}{7} \\ \text{старшая степень знаменателя} = 2 \end{array} \right\rangle$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x}{4x^2+3x} = \frac{8}{16+6} = \frac{4}{11}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{4x^2+3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x(4x+3)} = \frac{2}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{4x^2+3x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{4} \left\langle \begin{array}{l} \text{т.к. старшая степень числителя} = 2 \\ \text{старшая степень знаменателя} = 2 \end{array} \right\rangle$$

2) Вычислить пределы функций

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x})}{(\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x})(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x})}{2(x-1)} = \frac{2(3+3)}{2} = 6.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \left\langle \begin{array}{l} \text{следствие из первого замечательного предела} \\ \sin x \approx x \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} \left\langle \begin{array}{l} \text{следствие из второго замечательного предела} \\ e^x - 1 \approx x, \text{ если } x \rightarrow 0 \end{array} \right\rangle$$

3) Исследовать функцию на разрыв в точке $x=4$. $f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}}$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} 5^{\frac{1}{x-4}} = 5^{\frac{1}{4-0-4}} = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} 5^{\frac{1}{x-4}} = 5^{\frac{1}{4+0-4}} = 5^{+\infty} = \infty$$

В точке $x=4$ функция терпит разрыв второго рода.

Вариант 2

1. Вычислить пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-2}\right)^{5+2n}$ б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^4}{n+5n^2-2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2+3x-7}{2x^2-7x+5} \text{ при } x_0 = -1; x_0 = 1; x_0 = \infty$$

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-2}\right)^{5+2n} = \left[\left(1 + \frac{7}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{7}} \right]^{\frac{7(5+2n)}{n-2}} = e^{14}; \text{ б)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^4}{n+5n^2-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \infty, \left\langle \begin{array}{l} \text{т.к. старшая степень числителя} = 4 \\ \text{старшая степень знаменателя} = 2 \end{array} \right\rangle$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2+3x-7}{2x^2-7x+5} = \frac{4-3-7}{2+7+5} = -\frac{3}{7}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2+3x-7}{2x^2-7x+5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(2x-5)} = \frac{11}{-3};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+3x-7}{2x^2-7x+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{4}{2} = 2, \left\langle \begin{array}{l} \text{т.к. старшая степень числителя} = 2 \\ \text{старшая степень знаменателя} = 2 \end{array} \right\rangle$$

2) Вычислить пределы функций

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}{3x-12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{5})(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})}{3(x-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{3(x-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

а)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{x^2-2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(x-2)} = \frac{6}{-2} = -3$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\ln(1+7x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

в)

3) Исследовать функцию на разрыв в точке $x=3$.

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{3-0-3}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{3+0-3}} = 2^{+\infty} = \infty$$

В точке $x=3$ функция терпит разрыв второго рода.

Критерии оценки контрольной работы(1ч.):

Наличие 3-4 ошибок	3
Наличие 1-2 ошибок вычислительного характера	4
Правильно решенные все задания	5

РАЗДЕЛ № 4: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Тест (14Т, 5б.)

- Производная функции $y = x^2 \cdot e^x$ в точке $x_0 = 1$ равна...
 1) e 2) $3e$ 3) $2e$ 4) 1 .
- Производная функции $y = \sin x \cdot e^x$ в точке $x_0 = 0$ равна...
 1) 0 2) -1 3) 1 4) 2 .
- Производная функции $y = \frac{x}{\ln x}$ в точке $x_0 = e$ равна...
 1) 0 2) e 3) 1 4) -2 .
- Производная функции $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ равна...
 1) -1 2) 0 3) 1 4) $\frac{1}{2}$.
- Производная функции $y = 2(x+1)\cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ равна...
 1) $-\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) $\pi\sqrt{2}$.
- Производная функции $y = \frac{2x}{x^2+1}$ в точке $x_0 = 1$ равна...
 1) 1 2) -2 3) 0 4) 3 .
- Производная функции $y = x + \sqrt{4x+1}$ в точке $x_0 = 2$ равна...
 1) $\frac{7}{6}$ 2) $\frac{4}{5}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) 1 .
- Производная функции $y = 5^x - x^5$ в точке $x_0 = 1$ равна...
 1) 4 2) $5(\ln 5 - 1)$ 3) 0 4) $\ln 5 - 1$.
- Производная функции $y = \ln(2x+11) + 5x$ в точке $x_0 = -5$ равна...
 1) 7 2) 6 3) 2 4) 3 .
- Производная от функции $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$ равна...
 1) 12 2) 21 3) 0 4) 7 .

Ключи к ответу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	1	2	1	3	3	2	1	2

Время выполнения: 45 мин

Критерии оценивания: 10 заданий - 5 баллов

9-8 заданий – 4 балла

6 заданий – 3 балла.

Контрольная работа (17КР, 56.)

Вариант 1

1) Найти производную:

а) $y = 2^x + 4 \operatorname{arctg} x + 1; y' = 2^x \ln 2 + \frac{4}{1+x^2}$

б) $y = \sqrt{e^x} + \operatorname{ctg}^2 5x; y = \ln x \cdot (7x+2); y = e^{\frac{x}{2}} + \operatorname{ctg}^2 5x; y' = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} + 2 \operatorname{ctg} 5x \frac{-1}{\sin^2 5x} \cdot 5.$

2) Найти производную:

а) $y' = \frac{1}{x}(7x+2) + 7 \cdot \ln x.$

б) $y = 2^{\sin x} \cos^3 5x;$

$$y' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x \cdot \cos^3 5x + 2^{\sin x} 3 \cos^2 5x (-\sin 5x) 5$$

3) Найти производную 1-го и 2-го порядков: $y = \frac{7}{x^6} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[5]{x^3} + 2x^6;$

$$y'' = -24(-7)x^{-8} - \frac{4}{3} \left(-\frac{4}{3}\right) x^{-\frac{7}{3}} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{5}\right) x^{-\frac{7}{5}} + 60x^4 = \frac{168}{x^8} + \frac{16}{9\sqrt[3]{x^7}} + \frac{6}{25\sqrt[5]{x^7}} + 60x^4$$

4) Вычис-

лить производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln 2t \\ y = \operatorname{arctg} t; \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$x'_t = \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{t}; \quad y'_t = \frac{1}{1+t^2}; \quad y'_x = \frac{1}{1+t^2} \div \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t^2}.$$

5) Найти производную функции, заданной неявно: $y^3 = x^2 + \cos y \quad y^3 = x^2 + \cos y.$

Продифференцируем обе части уравнения и выразим производную:

$$3y^2 y' = 2x - \sin y \cdot y' \quad y'(3y^2 + \sin y) = 2x; \quad y' = \frac{2x}{3y^2 + \sin y} \quad y' = \frac{2x}{3y^2 + \sin y}.$$

Вариант 2

1) Найти производную:

а) $y = 4^x + 3 \cos x - 2; y' = 4^x \ln 4 - 3 \sin x.$

$$б) \quad y = \sin \sqrt{x} - \operatorname{arctg}^2 2x; \quad y' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\operatorname{arctg}^2 2x \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2.$$

2) Найти производную:

$$а) \quad y = e^x \cos x; \quad y' = e^x \cos x - \sin x \cdot e^x.$$

$$б) \quad y = e^{-\cos x} \cdot \arcsin(5x^3); \quad y' = e^{-\cos x} \sin x \cdot \arcsin(5x^3) + \frac{1}{\sqrt{1-25x^6}} \cdot 15x^2 \cdot e^{-\cos x}.$$

3) Найти производную 1-го и 2-го порядков функции $y = \frac{6}{\sqrt[4]{x}} - \frac{3}{x^3} + 3x^3 - \sqrt{x^7}$.

$$y = 6x^{-\frac{1}{4}} - 3x^{-3} + 3x^3 - x^{\frac{7}{2}}; \quad y' = 6\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}} + 9x^{-4} + 9x^2 + \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = -\frac{6}{4\sqrt[4]{x^5}} + \frac{9}{x^4} + 9x^2 + \frac{7}{2}\sqrt{x^5}.$$

$$y'' = -\frac{6}{4}\left(-\frac{5}{4}\right)x^{-\frac{9}{4}} - 36x^{-5} + 18x + \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{30}{16\sqrt[4]{x^9}} - \frac{36}{x^5} + 18x + \frac{35}{4}\sqrt{x^3}.$$

4) Вычислить производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_t = -\sin 2t \cdot 2 \\ y'_t = 2 \sin t \cdot \cos t = \sin 2t \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin 2t}{-2 \sin 2t} = -\frac{1}{2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$x'_t = -\sin 2t \cdot 2 = -2 \sin 2t; \quad y'_t = 2 \sin t \cos t = \sin 2t; \quad y'_x = \frac{\sin 2t}{-2 \sin 2t} = -\frac{1}{2}.$$

5) Найти производную функции, заданной неявно: $x^2 - \sqrt{y} = \operatorname{arctg} y$.

Продифференцируем обе части уравнения и выразим производную:

$$2x - \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{1}{1+y^2} \cdot y'; \quad 2x = y' \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{1+y^2} \right); \quad y' = \frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{1+y^2}}.$$

Критерии оценки контрольной работы (1ч.):

Правильно решенные 3 задания	3
Правильно решенные 4 задания	4
Правильно решенные все задания	5