МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Нововоронежский политехнический институт –

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

(НВПК НИЯУ МИФИ)

УТВЕРЖДЕН:

Педагогическим советом

«17» марта 2023г., протокол №550

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРИЯ РЯДОВ»

Направление подготовки: 27.03.04 Управление в технических системах

Наименование образовательной программы бакалавриата: Управление и информатика в технических системах

Уровень образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Нововоронеж 2023 г.

1. Паспорт
фонда оценочных средств

1.1.Модели контролируемых компетенций:

Оценочные средства для контроля по дисциплине направлены на проверку знаний и умений студентов, являющихся основой формирования у обучающихся компетенции:

ОПК-1 Способен использовать базовые знания естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа имоделирования, теоретического и экспериментального исследования

ОПК-1 Знать базовые законы естественнонаучных дисциплин; основные математические законы; основные физические явления, процессы, законы и границы их применимости; сущность основных химических законов и явлений; методы математического моделирования, теоретического и экспериментального исследования

ОПК-1 Уметь выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физикоматематический аппарат

ОПК-1 Владеть математическим аппаратом для разработки моделей процессов и явлений, решения практических задач профессиональной деятельности; навыками использования основных общефизических законов и принципов

ОПК-1 Способен анализировать задачи профессиональной деятельности на основе положений, законов и методов в области естественных наук и математики

З-ОПК-1 Знать: принципы построения систем управления

У-ОПК-1 Уметь: анализировать задачи управления в технических системах

ОПК-1 Владеть: базовыми знаниями о типовых технических средствах автоматики и управления

1.2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства		
			текущий контроль успеваемости *(неделя, форма)*	аттестация раздела *(неделя, форма)*	Промежуточная аттестация
1	Дифференциальные уравнения	ОПК-1,	4КР, 7ИТ	10ИДЗ	УО по билетам
2	Теория рядов	ОПК-1,	13КР	16ИТ	УО по билетам

КР – контрольная работа; ИТ – интернет-тест; ИДЗ – индивидуальное домашнее задание; УО – устный опрос.

1.3. Основные показатели оценивания компетенций:

Соотнесение формируемых компетенций со знаниями, умениями и навыками приведено в следующей таблице:

Индекс компетенции	Проектируемые результаты освоения дисциплины «Математика» и индикаторы формирования компетенций			Средства и технологии оценки
	Знания (З)	Умения (У)	Навыки (В)	
ОПК-1,	З 1, З2,	У1,У-2	В1	ИДЗ. Т, КР,УО по билетам

Основные показатели оценивания знаний, умений и навыков, необходимых для формирования компетенций, представлены в таблице:

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	**Основные показатели оценки результатов**	**Формируемые компетенции**
З1 - определения, теоремы и инструменты всех разделов дифференциальных уравнений и теории рядов;	Дифференциальные уравнения. Порядок дифференциального уравнения, общее и частное решение дифференциального уравнения. Определение дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка. Уравнения Бернулли. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n. Линейно независимые и линейно зависимые системы функций. Определитель Вронского и его свойства. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка n. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами характеристическим уравнением дифференциального уравнения. Линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Теорема об общем решении дифференциального уравнения. Линейные неоднородные дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Решение систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами способом подстановки. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Геометрическая прогрессия. Необходимое условие сходимости ряда. Простейшие действия над рядами: умножение на число, сложение и вычитание. Свойства рядов. Признаки сходи-	ОПК-1,

	мости. Ряды с положительными членами. Теоремы сравнения. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости ряда. Знакочередующиеся числовые ряды. Теорема Лейбница, оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Метод нахождения интервала сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение по степеням x некоторых элементарных функций. Приложения степенных рядов. Ряды Маклорена Приближенное вычисление с помощью рядов Тейлора и Маклорена. Тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье для периодических, четных и нечетных функций. Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье от четных и нечетных функций и на интервале $(0;\pi)$ Тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l;l)$. Ряды Фурье на интервале $(0;l)$	
З2 - основные методы решения дифференциальных уравнений и теории рядов.	Определение дифференциального уравнения, его порядка. Нахождение общего и частного решения дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных дифференциальных уравнения 1 порядка, уравнений Бернулли. Решение дифференциальных уравнения высших порядков, дифференциальных уравнений второго порядка, допускающие понижение порядка, линейных дифференциальных уравнений высших порядков, линейных однородных дифференциальных уравнения порядка n. Нахождение общего решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка n. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, составление характеристического уравнения. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной	ОПК-1,

	правой частью. Решение систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами способом подстановки. Нахождение *n-ого* члена числового ряда. Применение необходимого условия сходимости ряда. Исследование ряда на сходимость с помощью теорем сравнения, признаков сходимости Даламбера и Коши, интегрального признака сходимости ряда. Применение теоремы Лейбница для знакопеременных рядов, исследование их на абсолютнуюо и условную сходимость. Нахождение области сходимости функциональных рядов, степенных рядов. Методы нахождения интервала сходимости степенного ряда. Знание условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение по степеням x некоторых элементарных функций, разложение функции в ряды Маклорена. Приближенное вычисление с помощью рядов Тейлора и Маклорена. Разложение функции в ряды Фурье.	
У1- решать типовые математические задачи	Находить общего и частного решения дифференциального уравнения. Решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения первого порядка, линейные дифференциальные уравнения 1 порядка, уравнения Бернулли. Решать дифференциальные уравнения высших порядков, дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка, линейные дифференциальные уравнения высших порядков, линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n. Находить общее решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка n. Решать линейные однородные дифференциальные уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, составлять характеристические уравнения. Решать линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами. Решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Решать линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Решать системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами способом подстановки. Находить *n-ый* член числового ряда. Применять необходимое условие сходимости ряда. Исследовать ряд на сходимость с помощью теорем сравнения, признаков сходимости Даламбера и Коши, интегрального признака сходимости ряда. Применять теорему Лейбница для знакопеременных рядов, исследовать их на абсолютнуюо и условную сходимость. Находить область сходимости функциональных рядов, степенных рядов. Раскладывать некоторые элементарные функции в ряды Тейлора и Маклорена. Находить приближенное значений с помощью рядов Тейлора и Маклорена. Раскладывать функции в ряды Фурье.	ОПК-1,

У2 - самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по прикладным наукам, расширять свои математические познания.	Уметь решать математические задачи из числа общеинженерных и специальных дисциплин	ОПК-1,
В1 - первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин	Владеть методами решения всех выше перечисленных типовых задач при решении математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин	ОПК-1,

2. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для оценки знаний, умений, навыков по дисциплине

Типовые контрольные задания представлены в соответствии с перечнем оценочных средств по дисциплине в следующей структуре:

- методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций;
- сами оценочные средства ;
- критерии и шкалы оценивания.

2.1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ВХОДНОГО КОНТРОЛЯ

Педагогический анализ уровня знаний студентов первого курса, полученных на базе среднего общего образования, проводится по единым тестам НИИ мониторинга качества образования через интернет-портал http://diag.i-exam.ru/ по следующей обобщенной структуре измерительных материалов:

№ п/п	Наименование темы	Перечень учебных элементов
1	Степени и корни	***знать:*** понятие корня n-ой степени ***уметь:*** выполнять тождественные преобразования с корнями и находить их значение
2	Тождественные преобразования алгебраических выражений	***знать:*** правила выполнения тождественных преобразований рациональных выражений, разложение квадратного трехчлена на линейные

		множители ***уметь:*** раскладывать квадратный трехчлен на линейные множители, выполнять тождественные преобразования рациональных выражений
3	Преобразования тригонометрических выражений	***знать:*** формулы приведения, значения тригонометрических функций основных углов ***уметь:*** выполнять простейшие преобразования тригонометрических выражений
4	Тождественные преобразования логарифмических выражений	***знать:*** понятие логарифма, свойства логарифмов ***уметь:*** выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений, применять свойства логарифмов
5	Задачи из практической деятельности и повседневной жизни	***знать:*** способы представления данных, полученных из практических задач ***уметь:*** использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни
6	Текстовая задача	***знать:*** методы решения текстовых задач ***уметь:*** строить и исследовать простейшие математические модели
7	Уравнения с переменной под знаком модуля	***знать:*** методы решения уравнений с переменной под знаком модуля ***уметь:*** решать простейшие уравнения с переменной под знаком модуля
8	Иррациональные уравнения	***знать:*** приемы решения иррациональных уравнений ***уметь:*** решать иррациональные уравнения
9	Логарифмические уравнения	***знать:*** методы решения логарифмических уравнений ***уметь:*** решать простейшие логарифмические уравнения
10	Тригонометрические уравнения	***знать:*** общие формулы решения простейших тригонометрических уравнений ***уметь:*** решать простейшие тригонометрические уравнения
11	Системы линейных уравнений	***знать:*** методы решения систем линейных уравнений ***уметь:*** решать системы линейных уравнений с двумя неизвестными
12	Квадратные неравенства	***знать:*** приемы решения неравенств второй степени ***уметь:*** решать неравенства второй степени
13	Показательные неравенства	***знать:*** способы решения показательных и логарифмических неравенств ***уметь:*** решать показательные и логарифмические неравенства
14	Область определения функции	***знать:*** определения элементарных функций ***уметь:*** находить области определения элементарных функций
15	Графики элементарных функций	***знать:*** графики элементарных функций ***уметь:*** определять по графику соответствующую ему функцию

16	Производная функции	***знать:*** формулы и правила нахождения производных ***уметь:*** находить производные элементарных функций
17	Наименьшее и наибольшее значения функции	***знать:*** методы нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции, заданной на отрезке ***уметь:*** находить наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции, заданной на отрезке с помощью производной
18	Геометрический смысл определенного интеграла	***знать:*** геометрический смысл определенного интеграла ***уметь:*** находить площадь криволинейной трапеции
19	Решение прямоугольных треугольников	***знать:*** соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника ***уметь:*** находить элементы прямоугольного треугольника
20	Применение геометрических знаний для решения практических задач	***знать:*** формулы для нахождения поверхностей и объемов многогранников и круглых тел ***уметь:*** применять геометрические знания для решения практических задач

Критерии и шкала оценивания:

Критерий оценивания – процент правильно выполненных заданий, в соответствии с которым определяется уровень подготовки группы и отдельных студентов по следующей шкале:

Процент правильно выполненных заданий	Уровни усвоения
[70%-100%]	высокий
[40%-59%)	не высокий
[0%-39%)	низкий

2.2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

РАЗДЕЛ №1 «Дифференциальные уравнения»

Контрольная работа (4 КР, 5б)

Вариант 1

№1 $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$

Решение:

$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{-xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ответ: $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$

№2 $y' - \frac{3y}{x} = x^2$

Решение:

$y' - \frac{3y}{x} = x^2$ -линейное дифференциальное уравнение 1 порядка

замена: $\begin{cases} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{cases}$

$$u'v + v'u - \frac{3uv}{x} = x^2$$

$$u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = 0\,;$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x}\,;\ \ln|v| = 3\ln|x|$$

$$v = x^3$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x^3 = x^2\,;\ \int du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u = \ln|x| + C$$

Ответ: $y = (\ln|x| + C) \cdot x^3 = x^3 \ln|x| + Cx^3$

№3 $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

Решение:

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ -однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка;

Замена : $\frac{y}{x} = t\,;\ y' = t'x + t$

$$t'x + t = e^t + t\,;\ \frac{dt}{dx} \cdot x = e^t$$

$$\int e^{-t}dt = \int \frac{dx}{x} \quad => -e^{-t} = \ln|x| + \ln|C|$$

Ответ: $\ln|Cx| = e^{\frac{-y}{x}}$

№4 $y''' = x + \sin 2x$

Решение:

$y''' = x + \sin 2x$ -дифференциальное уравнение 3-го порядка, допускающее понижение порядка.

$$y'' = \int (x + \sin 2x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C_1$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{6}-\frac{\sin 2x}{4}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^4}{24}+\frac{\cos 2x}{8}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

Ответ: $y=\frac{x^4}{24}+\frac{\cos 2x}{8}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$

№5 $y'-y\,ctg\,x=2x\sin x,\quad y(\pi/2)=0.$

Решение:

$y'-yctgx=2x\sin x\,;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

- линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

Замена: $\begin{cases} y=uv \\ y'=u'v+v'u \end{cases}$

$$u'v+v'u-uv'ctgx=2x\sin x$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}-vctgx\right)=0 \qquad \int\frac{dv}{v}=\int ctgxdx$$

$$\ln|v|=\ln|\sin x| \;=>\; v=\sin x$$

$$u'\cdot\sin x=2x\sin x$$

$$\frac{du}{dx}=2x \;=>\; u=x^2+C$$

$$y=x^2\sin x+C\sin x\,;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}\cdot 1+C=0$$

$$C=-\frac{\pi^2}{4}$$

Ответ: $y=\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$

Вариант 2

№1 $\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0$

Решение:

$\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$; - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\sqrt{4+y^2}dx=(x^2+1)ydy;$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}};$$

Ответ: $arctgx=\sqrt{4+y^2}+C$

№2 $y'+\frac{2y}{x}=x^5,$

Решение:

$y'+\frac{2y}{x}=x^3$; -линейное дифференциальное уравнение 1 порядка

Замена: $\begin{Bmatrix} y=uv \\ y'=u'v+v'u \end{Bmatrix}$

$$u'v+v'u+\frac{2uv}{x}=x^3;$$

$$u\left(v'+\frac{2v}{x}\right)=0 \;=>\; \frac{dv}{dx}=-\frac{2v}{x}$$

$\int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{dx}{x}$;

$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x^2}\right| \;\; => v = \frac{1}{x^2}$

$u' \frac{1}{x^2} = x^3$;

$\int du = \int x^5\, dx$;

$$u = \frac{x^6}{6} + C$$

$$y = \left(\frac{x^6}{6} + C\right) * \frac{1}{x^2} = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$

№3 $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{10} + \frac{y}{x}$

Решение:

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \frac{y}{x}$; -однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка;

Замена : $\frac{y}{x} = t$; $y' = t'x + t$

$t'x + t = t^3 + t$;

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t^3}{x}$$

$$\int \frac{dt}{t^3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|x| + \ln|C| = -\frac{1}{2t^2}$$

Ответ: $\ln|Cx| = -\frac{x^2}{2y^2}$

№4 $y''' = x + e^{3x}$

Решение:

$y''' = x^2 - 4cosx$ -дифференциальное уравнение 3-го порядка, допускающее понижение порядка.

$$y'' = \int (x^2 - 4cosx)dx = \frac{x^3}{3} - 4sinx + C_1$$

$$y' = \int (\frac{x^3}{3} - 4sinx + C1)dx = \frac{x^4}{12} + 4cosx + C_1x + C_2$$

$$y = \int (\frac{x^4}{12} + 4cosx + C_1x + C_2)dx = \frac{x^5}{60} + 4sinx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Ответ: $y = \frac{x^5}{60} + 4sinx + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

№5 $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$

Решение:

$y' - y\cos x = \sin 2x;\ y(0) = -1$- линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

Замена: $\begin{cases} y = uv \\ y' = u'v + v'u \end{cases}$

$u'v + v'u - uv\cos x = \sin 2x \Rightarrow u(v' - v\cos x) = 0$

$\int \frac{dv}{v} = \int \cos x dx \Rightarrow \ln|v| = \sin x$

$v = e^{\sin x}$

$u' e^{\sin x} = 2\sin x\cos x$

$u = \int 2\sin x\cos x e^{-\sin x} dx = \left| \begin{matrix} -\sin x = t \\ dt = -\cos x dx \end{matrix} \right| = 2\int (-t)(-dt) e^t = 2\int te^t\, dt =$

$= \left| \begin{matrix} a = t, & db = e^t dt \\ da = dt, & b = e^t \end{matrix} \right| = 2\left(te^t - \int e^t\, dt \right) = 2(t-1)e^t + C$

$= -2(\sin x + 1)e^{-\sin x} + C$

$y = \left(-2(\sin x + 1)e^{-\sin x} + C \right) e^{\sin x} = -2(\sin x + 1) + C * e^{\sin x}$

$y(0) = -2 + C * 1 = -1 \Rightarrow C = 1$

Ответ: $y = -2(\sin x + 1) + e^{\sin x}$

Время выполнения: 45 мин

Критерии оценивания: 5 заданий -5 баллов

4 задания – 4 баллов

3 заданий -3баллов

Тест (7Т, 5б)

(правильный ответ подчеркнут)

1. Дано дифференциальное уравнение $y'' - 3y' = 0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид

1) $k^2 - 3 = 0$ 2) $k^2 + 3k = 0$ 3) $k^2 + 3 = 0$ <u>4) $k^2 - 3k = 0$</u>

2. Дано дифференциальное уравнение $y'' - 9y = 0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид

1) $k^2 - 9k = 0$ <u>2) $k^2 - 9 = 0$</u>

3) $k^2 + 9 = 0$ 4) $k^2 + 9k = 0$

3. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 3y' - 4y = 0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид

1) $1 + 3k - 4k^2 = 0$ 2) $k^2 - 3k - 4 = 0$

<u>3) $k^2 + 3k - 4 = 0$</u> 4) $k^2 - 3k + 4 = 0$

4. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 9y' = x$ по виду его правой части соответствует функция

1) $Ax + B$ 2) $Ae^{9x} + B$ <u>3) $Ax^2 + Bx$</u> 4) Ax

5. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' - 3y = xe^{2x}$ по виду его правой части соответствует функция

1) $Ae^{-3x}+Be^{x}$ 2) Axe^{2x}
3) $e^{2x}(Ax^2+Bx)$ <u>4) $e^{2x}(Ax+B)$</u>

6. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''+3y'-4y=(x+1)e^{x}$ по виду его правой части соответствует функция

1) $Ae^{x}+Be^{-4x}$ <u>2) $e^{x}(Ax+B)$</u>
3) $e^{x}(Ax^2+Bx)$ 4) $e^{x}(Ax^2+Bx+C)$

7. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-2y'+y=2e^{x}$ по виду его правой части соответствует функция

<u>1) $Ae^{x}x^2$</u> 2) $e^{x}(Ax^2+Bx)$ 3) Ae^{x} 4) $e^{x}(Ax+B)$

8. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''+5y'+6y=5e^{5x}$ по виду его правой части соответствует функция

1) $e^{5x}(Ax+B)$ 2) $Ae^{-2x}+Be^{-3x}$ 3) Axe^{5x} <u>4) Ae^{5x}</u>

9. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''+6y'+5y=25x^2-2$ по виду его правой части соответствует функция

1) $Ae^{-5x}+Be^{-x}$ 2) Ax^2+B
<u>3) Ax^2+Bx+C</u> 4) $e^{-x}(Ax+B)$

10. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''-5y'+4y=0$. Тогда его общее решение имеет вид

1) $C_1e^{x}+C_2e^{4x}$ 2) $C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$
3) $C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$ 4) $C_1e^{x}+C_2e^{-4x}$

11. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''+y'=0$. Тогда его общее решение имеет вид

1) $C_1+C_2e^{x}$ 2) $C_1+C_2e^{-x}$
3) $C_1e^{x}+C_2e^{-x}$ 4) $C_1\sin x+C_2\cos x$

12. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''+9y=0$. Тогда его общее решение имеет вид

1) $C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$ 2) $C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$
3) $C_1\sin 3x+C_2\cos 3x$ 4) $C_1+C_2e^{-9x}$

Время выполнения: 60 мин
Критерии оценивания: 12 заданий -5 баллов
10-11 заданий – 4баллов
7-9 заданий – 3 баллов

<u>РАЗДЕЛ №2: «Теория рядов»</u>

Контрольная работа (13 Кр, 10б)

Вариант 1

Исследовать ряды на сходимость:

№1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6+\sqrt[3]{n}}{n^2+n+1}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+\sqrt[3]{n}}{n^2+n+1}$; $\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{3}}}$ $p=\frac{5}{3}>1$ сходится.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(6+\sqrt[3]{n})\times n^{\frac{5}{3}}}{n^2+n+1} = 1\ (\neq 0)$ оба ряда сходятся одновременно по второму признаку сравнения

Ответ: сходится

№2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sqrt[9]{n}}{(n+1)^2}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \times \sqrt[9]{n}}{(n+1)^2}$;

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\times\sqrt[9]{n+1}\times(n+1)^2}{(n+1)^2\times 2^n\sqrt[9]{n}} = 2\ >1-$ *р*асходится по признаку Даламбера

Ответ: расходится

№3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n+1}{7n-3}\right)^{n+5}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n+1}{7n-3}\right)^{n+5}$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Un} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9n+1}{7n-3}\right)^{\frac{n+5}{n}} = \left(\frac{9}{7}\right)^1 = \frac{9}{7} > 1$

$-$расходится по радикальному признаку Коши

Ответ: расходится

№4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\,ln^{10}(n+4)}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)ln^{10}(n+4)}$; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)ln^{10}(x+4)} = \left|\ ln(x+4) = t; \quad \frac{1}{x+4}dx = dt; \right.$

$\left.\begin{matrix} x & 1 & +\infty \\ t & ln\,5 & +\infty \end{matrix}\ \right| =$

$= \int_{ln\,5}^{+\infty} \frac{dt}{t^{10}} = -\frac{1}{9}\times\frac{1}{t^9}\Big|_{ln5}^{+\infty} = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{+\infty} - -\frac{1}{ln^9 5}\right) = \frac{1}{9ln^9 5}$ - ряд сходится по интегральному признаку Коши

Ответ: сходится

№5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[10]{n+6}}{n+4}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[10]{n+6}}{n+4}$ - знакочередующийся ряд

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[10]{n+6}}{n+4}=0$

2) На абсолютную сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[10]{n+6}}{n+4}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{10}}}$ $p=\frac{9}{10}<1$ ряд расходится.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[10]{n+6}\times n^{\frac{9}{10}}}{(n+4)\times 1}=1(\neq 0)$ оба ряда расходятся одновременно => абсолютной сходимости нет

3) На условную сходимость:

1) $\lim_{n\to\infty}Un=0$

2) $\frac{\sqrt{7}}{5}>\frac{\sqrt{8}}{6}>\frac{\sqrt{9}}{7}>\cdots$

Ответ: Ряд сходится условно

Вариант 2

№1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{(2n-1)^2}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{(2n-1)^2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\frac{1}{3}}}$ $p=\frac{5}{3}>1$ сходится.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}\times n^{\frac{5}{3}}}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}(\neq 0)$ оба ряда сходятся одновременно по втором признаку сравнения

Ответ: сходится

№2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^6}{3^n\sqrt{n}}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^6}{3^n\sqrt{n}}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1)+1)^6\times 3^n\times\sqrt{n}}{3^{n+1}\times\sqrt{n+1}\times(2n+1)^6}=\frac{1}{3}<1$ – ряд сходится по признаку Даламбера

Ответ: сходится

№3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^{n+3}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^{n+3}$; $K=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-5}{2n+1}\right)^{\frac{n+3}{n}}=3>1$

ряд расходится по радикальному признаку Коши

Ответ: расходится

№4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)\, ln^3(5n+1)}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)ln^3(5n+1)}$; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(5x+1)ln^3(5x+1)} = |\ \ln(5x+1) = t$;

$\frac{5}{5x+1}dx = dt$; $\begin{matrix} x & 1 & +\infty \\ t & ln\,6 & +\infty \end{matrix}$ $| =$

$= \frac{1}{5}\int_{ln\,6}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{ln^2 6}\right) = \frac{1}{10ln^2 6}$ => ряд сходится по интегральному признаку Коши

Ответ: сходится

№5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

Решение:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ - знакочередующийся ряд

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$

2) На абсолютную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{2}}}$ $\quad p = \frac{1}{2} < 1$

ряд расходится

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n}}{n+2} = 1\ (\neq 0)$

оба ряда расходятся по второму признаку сравнения

=> абсолютной сходимости нет

3) на условную сходимость: $\lim_{n\to\infty} Un = 0$; $\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{4}}{5} > \frac{\sqrt{5}}{6} \ldots$ =>

ряд сходится условно

Ответ: ряд сходится условно

Время выполнения: 30 мин

Критерии оценивания: 5 заданий -10 баллов

4 задания – 8 баллов

3 задания – 6 баллов

Тест (16Т, 10б)

(правильный ответ подчеркнут)

1. Если функция $f(x)$ периодическая на [-π; π], то коэффициент a_n n = 0,1,2,3… разложения в ряд Фурье $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ имеет вид:

1) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, (n = 1,2,3,\cdots)$

<u>2) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, (n = 0,1,2,3,\cdots)$</u>

3) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, (n = 1,2,3,\cdots)$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, (n = 0,1,2,3,\cdots)$

2. На $[-l;l]$ ряд Фурье для чётной функции имеет вид:

1) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right)$

2) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}$

3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$

4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right)$

3. На $[-l;l]$ ряд Фурье для нечётной функции имеет вид:

1) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right)$

2) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}$

3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$

4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right)$

4. Если функция $f(x)$ периодическая на [-π; π], то коэффициент b_n разложения в ряд Фурье имеет вид:

1) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, (n = 1,2,3,\cdots)$

2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, (n = 0,1,2,3,\cdots)$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, (n = 1,2,3,\cdots)$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, (n = 0,1,2,3,\cdots)$

5. Ряд $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n-2}}{(-1)^{n+1}(2n-2)!} + ...,$

является разложением в ряд Маклорена функции:

1) e^x 2) chx 3) $\sin x$ 4) $\cos x$

6. Разложение функции $f(x) = 2^x$ в ряд по степеням x имеет вид:

1) $1 + x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}\ln^{n-1} 2}{(n-1)!} + ...$, $-\infty < x < +\infty$

2) $1 - x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} - \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + ... + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{n-1}\ln^{n-1} 2}{(n-1)!} + ...$,

$-\infty < x < +\infty$

3) $x\ln 2 + \frac{x^2\ln^2 2}{2!} + \frac{x^3\ln^3 2}{3!} + ... + \frac{x^n\ln^n 2}{n!} + ...$, $-\infty < x < +\infty$

4) $x\ln 2 - \frac{x^2\ln^2 2}{2!} + \frac{x^3\ln^3 2}{3!} - ... + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n\ln^n 2}{n!} + ...$,

$-\infty < x < +\infty$

7. Разложение функции *f (x)* = $\sqrt{1+x}$ в ряд по степеням *x* имеет вид:

<u>1)</u> $\underline{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-...+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot...\cdot(\frac{1}{2}-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+...}$<u>, *-1 ≤ x ≤ 1*</u>

2) $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+...+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot...\cdot(\frac{1}{2}-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+...$, *-1 ≤ x ≤ 1*

3) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+...+\frac{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}-1)\cdot...\cdot(\frac{1}{4}-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+...$,

-1 ≤ x ≤ 1

4) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2-...+\frac{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}-1)\cdot...\cdot(\frac{1}{4}-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+...$,

-1 ≤ x ≤ 1

8. Промежутком сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ является:

1) $(-1;1)$ 2) $(-1;1]$ 3) $[-1;1]$ <u>4) $[-1;1)$</u>

9. Промежутком сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ является:

<u>1) $(-\infty;+\infty)$</u> 2) $\{0\}$ 3) $(-1;1)$ 4) $[-1;1]$

10. Промежутком сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ является:

1) $(-\infty;+\infty)$ <u>2) $\{0\}$</u> 3) $[-1;1)$ 4) $(-1;1]$

11. Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится в точке:

<u>1) *x* = 1</u> 2) *x* = -2 3) *x* = 2 4) $-\frac{3}{2}$

12. Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ расходится в точке:

1) *x* = 1 2) *x* = -1 3) *x* = 0 <u>4) таких точек нет</u>

Время выполнения: 40 мин

Критерии оценивания: 12-11 заданий -10 баллов

10-9 заданий – 8 баллов

8-7 задания – 6 баллов