МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Нововоронежский политехнический институт –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НВПИ НИЯУ МИФИ)

УТВЕРЖДЕН:
Педагогическим советом
«17» марта 2023г., протокол № 550

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Направление подготовки: 13.03.02. Электроэнергетика и электротехника

Наименование образовательной программы: Электрические станции

Уровень образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Нововоронеж 2023 г.

1. Паспорт
фонда оценочных средств

1.1.Модели контролируемых компетенций:

Оценочные средства для контроля по дисциплине направлены на проверку знаний и умений студентов, являющихся основой формирования у обучающихся компетенции:

ОПК-1 Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности;

УКЕ-1 Способен использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в поставленных задачах.

В результате освоения дисциплины студенты, для формирования данных компетенций студенты должны:

1) знать:

З1 - определения, теоремы всех разделов высшей математики;

З2 - основные методы дифференциального и интегрального исчисления.

2) уметь:

У1 - решать типовые математические задачи;

У2 - самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по прикладным наукам, расширять свои математические познания.

3) владеть:

В1 - математическим аппаратом для разработки математических моделей процессов и явлений и решения практических задач профессиональной деятельности.

1.2. Программа оценивания контролируемой компетенции:

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства		
			текущий контроль успеваемости *(неделя, форма)*	аттестация раздела *(неделя, форма)*	Промежуточная аттестация
1	Приложения производной.	ОПК-1 УКЕ-1	3 ИТ	4КР	УО по билетам
2	Функции нескольких переменных.	ОПК-1 УКЕ-1	-	6 КР	УО по билетам
3	Интегралы (неопределенные, определенные и несобственные)	ОПК-1 УКЕ-1	10 КР 12 ИТ	13 ИДЗ	УО по билетам
4	Кратные и криволинейные интегралы.	ОПК-1 УКЕ-1	-	16 КР	УО по билетам

КР – контрольная работа; ИТ – интернет-тест; ИДЗ – индивидуальное домашнее задание; УО – устный опрос.

1.3. Основные показатели оценивания компетенций:

Соотнесение формируемых компетенций со знаниями, умениями и навыками приведено в следующей таблице:

Индекс компетенции	Проектируемые результаты освоения дисциплины «Математика» и индикаторы формирования компетенций			Средства и технологии оценки
	Знания (З)	Умения (У)	Навыки (В)	
ОПК-1 УКЕ-1	З 1, З2,	У1,У-2	В1	ИДЗ, Т, КР,УО по билетам

Основные показатели оценивания знаний, умений и навыков, необходимых для формирования компетенций, представлены в таблице:

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	**Основные показатели оценки результатов**	**Формируемые компетенции**
З1 - определения, теоремы и инструменты всех разделов математического анализа;	Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши, их геометрический смысл. Правило Лопиталя Формулы Тейлора и Маклорена. Признаки монотонности функции. Экстремум функции. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Выпуклость вверх, выпуклость вниз. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Исследование функции на максимум и минимум с помощью производной. Асимптоты графика функции. Схема полного исследования функции. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование Замена переменных. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование рациональных функций. Разложение рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на элементарные. Способы вычисления коэффициентов при разложении рациональной дроби на элементарные. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций некоторых иррациональностей. Интегрирование рациональных функций от тригонометрических функций. Определение определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Правила вычисления определенных интегралов. Формула Ньютона	ОПК-1 УКЕ-1

	Лейбница. Замена переменных. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Приложения определенных интегралов. Формулы площадей плоских фигур. Вычисление площади плоских фигур в декартовой системе координат. Вычисление площадей при параметрическом задании функции. Полярная система координат. Изображение линий в полярной системе координат. Вычисление площади криволинейного сектора. Площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат. Вычисление площади криволинейного сектора. Вычисление длины дуги кривой в декартовой системе координат. Вычисление длины дуги в полярной системе координат и кривой, заданной параметрически. Вычисление длин дуг плоских кривых. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений. Объем тела вращения. Формулы площадей поверхностей вращения. Несобственный интеграл, несобственный интеграл I-го рода, 2-го рода. Вычисление несобственных интегралов I-го рода, II-го рода и определение их сходимости или расходимости. Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла. Функции нескольких переменных. Функции двух переменных, способы задания, область определения. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные производные функций двух переменных и их геометрический смысл. Геометрическим смыслом частной производной. Частные дифференциалы функции двух переменных. Полное приращение функции и полный дифференциал функции двух переменных. Частные производные высших порядков. Дифференцирование сложной функции, инвариантность формы 1 дифференциала. Инвариантность (неизменность формы записи дифференциала первого порядка). Производная неявной функции. Частные производные высших порядков. Экстремум функции 2 переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области. Производная по направлению и градиент.	
З2 - основные методы математического анализа.	Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Разложение произвольной функции в ряд Тейлора. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Приложения формул Тейлора и Маклорена. Исследование функции на монотонность и экстремум. Нахождение точек перегиба. Исследование функции на промежутки выпуклости. Определение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Нахождение асимптот функции. Проведение полного исследования функции и построение его графика. Нахождение первообразной и неопределенного интеграла. Нахождение уравнения первообразной, проходящей через заданную точку. Применение свойств неопределенного интеграла. Использование непо-	ОПК-1 УКЕ-1

	средственного интегрирования. Вычисление интеграла методом замены переменных и по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование рациональных функций. Разложение рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на элементарные. Знание способов вычисления коэффициентов при разложении рациональной дроби на элементарные. Применение правил интегрирования рациональных дробей, правила интегрирования рациональных функций некоторых иррациональностей. Использование правил интегрирования рациональных функций от тригонометрических функций. Вычисление определенного интеграла, используя основные свойства определенного интеграла, правила вычисления определенных интегралов, формулу Ньютона Лейбница, метод замены переменных и интегрирования по частям в определенном интеграле. Вычисление площади плоских фигур в декартовой системе координат. Вычисление площадей при параметрическом задании функции. Изображение линий в полярной системе координат. Вычисление площади криволинейного сектора, площади криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически, площади криволинейного сектора в полярной системе координат. Вычисление площади криволинейного сектора. Вычисление длины дуги кривой в декартовой системе координат, в полярной системе координат и кривой, заданной параметрически. Вычисление длин дуг плоских кривых. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений. Вычисление объемов тел вращения. Формулы площадей поверхностей вращения. Вычисление несобственных интегралов I-го рода, II-го рода и определение их сходимости или расходимости. Применение формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла. Функции нескольких переменных. Вычисление частных производных функций двух переменных. Нахождение частных дифференциалов функции двух переменных, и полного дифференциала функции двух переменных. Вычисление частных производных высших порядков. Дифференцирование сложной функции, вычисление производной неявной функции двух переменных. Определение экстремума функции 2 переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой области. Нахождение производной по направлению и градиента.	
У1- решать типовые математические задачи	Примененять теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши в решении задач.. Раскладывать функции в ряд Тейлора, Маклорена. Применять приложения формул Тейлора и Маклорена для приближенных вычислений. Исследовать функции на монотонность и экстремум. Находить точки перегиба. Исследовать функции на выпуклость. Опреде-	ОПК-1 УКЕ-1

	лять наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Находить асимптоты функции. Проводить полное исследования функции и строить его график. Находить первообразную и неопределенный интеграл. Находить уравнение первообразной, проходящей через заданную точку. Вычислять неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования, методом замены переменных и по частям. Интегрировать выражения, содержащие квадратный трехчлен. Интегрировать рациональные функции. Раскладывать рациональные дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на элементарные. Знать способы вычисления коэффициентов при разложении рациональной дроби на элементарные. Применять правила интегрирования рациональных дробей, правила интегрирования рациональных функций некоторых иррациональностей, правила интегрирования рациональных функций от тригонометрических функций. Вычислять определенный интеграл, используя основные его свойства, формулу Ньютона Лейбница, метод замены переменных и интегрирования по частям в определенном интеграле. Вычислять площадь плоских фигур в декартовой системе координат. Вычислять площади при параметрическом задании функции. Изображать линий в полярной системе координат. Вычислять площадь криволинейного сектора, площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически, площадь криволинейного сектора в полярной системе координат. Вычислять площадь криволинейного сектора. Вычислять длину дуги кривой в декартовой системе координат, в полярной системе координат и кривой, заданной параметрически. Вычислять длину дуги плоских кривых. Вычислять объемы тел по площадям параллельных сечений. Вычислять объемы тел вращения, площади поверхностей вращения. Вычислять несобственные интегралы I-го рода, II-го рода и определять их сходимость или расходимость. Применять формулу Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла. Вычислять частные производные функций двух переменных. Находить частные дифференциалы функции двух переменных, полный дифференциал функции двух переменных. Вычислять частные производные высших порядков. Дифференцировать сложную функцию, вычислять производную неявной функции двух переменных. Определять экстремум функции 2 переменных. Находить наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области. Нахождить производную по направлению и градиент.	

У2 - самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по прикладным наукам, расширять свои математические познания.	Уметь решать математические задачи из числа общеинженерных и специальных дисциплин	ОПК-1 УКЕ-1
В1 - первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин	Владеть методами решения всех выше перечисленных типовых задач при решении математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин	ОПК-1 УКЕ-1

2. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
для оценки знаний, умений, навыков по дисциплине

Типовые контрольные задания представлены в соответствии с перечнем оценочных средств по дисциплине в следующей структуре:

- методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций;
- сами оценочные средства ;
- критерии и шкалы оценивания.

2.1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ВХОДНОГО КОНТРОЛЯ

Педагогический анализ уровня знаний студентов первого курса, полученных на базе среднего общего образования, проводится по единым тестам НИИ мониторинга качества образования через интернет-портал http://diag.i-exam.ru/ по следующей обобщенной структуре измерительных материалов:

№ п/п	Наименование темы	Перечень учебных элементов
1	Степени и корни	***знать:*** понятие корня n-ой степени ***уметь:*** выполнять тождественные преобразования с корнями и находить их значение
2	Тождественные преобразования алгебраических выражений	***знать:*** правила выполнения тождественных преобразований рациональных выражений,

		разложение квадратного трехчлена на линейные множители ***уметь:*** раскладывать квадратный трехчлен на линейные множители, выполнять тождественные преобразования рациональных выражений
3	Преобразования тригонометрических выражений	***знать:*** формулы приведения, значения тригонометрических функций основных углов ***уметь:*** выполнять простейшие преобразования тригонометрических выражений
4	Тождественные преобразования логарифмических выражений	***знать:*** понятие логарифма, свойства логарифмов ***уметь:*** выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений, применять свойства логарифмов
5	Задачи из практической деятельности и повседневной жизни	***знать:*** способы представления данных, полученных из практических задач ***уметь:*** использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни
6	Текстовая задача	***знать:*** методы решения текстовых задач ***уметь:*** строить и исследовать простейшие математические модели
7	Уравнения с переменной под знаком модуля	***знать:*** методы решения уравнений с переменной под знаком модуля ***уметь:*** решать простейшие уравнения с переменной под знаком модуля
8	Иррациональные уравнения	***знать:*** приемы решения иррациональных уравнений ***уметь:*** решать иррациональные уравнения
9	Логарифмические уравнения	***знать:*** методы решения логарифмических уравнений ***уметь:*** решать простейшие логарифмические уравнения
10	Тригонометрические уравнения	***знать:*** общие формулы решения простейших тригонометрических уравнений ***уметь:*** решать простейшие тригонометрические уравнения
11	Системы линейных уравнений	***знать:*** методы решения систем линейных уравнений ***уметь:*** решать системы линейных уравнений с двумя неизвестными
12	Квадратные неравенства	***знать:*** приемы решения неравенств второй степени ***уметь:*** решать неравенства второй степени
13	Показательные неравенства	***знать:*** способы решения показательных и логарифмических неравенств ***уметь:*** решать показательные и логарифмические неравенства
14	Область определения функции	***знать:*** определения элементарных функций ***уметь:*** находить области определения элементарных функций
15	Графики элементарных функций	***знать:*** графики элементарных функций ***уметь:*** определять по графику соответствующую

		ему функцию
16	Производная функции	***знать:*** формулы и правила нахождения производных ***уметь:*** находить производные элементарных функций
17	Наименьшее и наибольшее значения функции	***знать:*** методы нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции, заданной на отрезке ***уметь:*** находить наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции, заданной на отрезке с помощью производной
18	Геометрический смысл определенного интеграла	***знать:*** геометрический смысл определенного интеграла ***уметь:*** находить площадь криволинейной трапеции
19	Решение прямоугольных треугольников	***знать:*** соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника ***уметь:*** находить элементы прямоугольного треугольника
20	Применение геометрических знаний для решения практических задач	***знать:*** формулы для нахождения поверхностей и объемов многогранников и круглых тел ***уметь:*** применять геометрические знания для решения практических задач

Критерии и шкала оценивания:

Критерий оценивания – процент правильно выполненных заданий, в соответствии с которым определяется уровень подготовки группы и отдельных студентов по следующей шкале:

Процент правильно выполненных заданий	Уровни усвоения
[70%-100%]	высокий
[40%-59%)	не высокий
[0%-39%)	низкий

2.2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

РАЗДЕЛ №1 «Приложения производной»

Тест (3 ИТ, 5б)

1.Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:1) $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ 2) $y=y'(x_0)(x-x_0)-y_0$

3) $y-y_0=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$ 4) $y+y_0=\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$.

2. Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций равен пределу…

1) отношения производных этих функций
2) отношения производных этих функций, если он существует
3)производной отношения этих функций
4) производной числителя

3. Если дифференцируемая на $(a;b)$ функция $y = f(x)$ неубывает на этом интервале, то

1) $f'(x) = 0$ 2) $f'(x) \geq 0$ 3) $f'(x) \leq 0$ 4) $f'(x) \neq 0$

4.Точкой перегиба графика функции $y = 2x^2 - 4x$ является:
1) $(0;0)$ 2) $(1;-2)$ 3) $(1;1)$ 4) $(1;2)$.

5. Точкой перегиба графика функции $y = x^3 - 6x^2$ является:
1) $(3;-27)$ 2) $(0;3)$ 3) $(3;27)$ 4) $(1;-5)$.

6. Значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$ равно…

1) ∞ 2) 0 3) $\frac{1}{3}$ 4) 3

7. Значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{e^{3x} - 1}$ равно…

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{7}{3}$ 3) 7 4) $\frac{7}{2}$

8. Значение предела $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ равно…

1) 1 2) 0 3) ∞ 4) -1

9. Значение предела $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-x}$ равно…

1) ∞ 2) 0 3) e^x 4) 1.

10. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2 - x^2 + 3x^4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$:
1) -1 2) 10 3) 14 4) -10

Время выполнения: 30 мин
Критерии оценивания: 10 заданий -5 баллов
8-9 заданий – 4 балла
6-7 заданий – 3 балла.

Ключи к ответу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	1	2	3	2	1	2	4

Контрольная работа (4КР, 5б.)

Вариант 1

1.Составить уравнение нормали и касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0. $y = 2x^2 + 3x - 1$; $x_0 = -2$.

Решение:

$$y(x_0) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$$
$$y' = 4x + 3$$
$$y'(x_0) = 8 + 3 = 11$$

Уравнение касательной

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = 1 + 11(x - 2)$$
$$y = 11x - 22 + 1$$
$$y = 11x - 21$$

Уравнение нормали

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$
$$y = 1 - \frac{1}{11}(x - 2)$$
$$y = -\frac{1}{11}x + \frac{2}{11} + 1$$
$$y = -\frac{1}{11}x + \frac{13}{11}$$

2.Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+5x^3}{5x^4-2x+10},\ б)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+5x^3}{5x^4-2x+10} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{15x^2}{20x^3-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{30x}{60x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}\cdot 2}{\cos 3x} = \frac{2}{1} = 2$

3.Исследовать функцию на экстремум и перегиб:

$$y = x^4 - 2x^2 + 3$$

Решение:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

$$\begin{array}{cccccccc} - & & + & & - & & + & \\ & -1 & & 0 & & 1 & & \end{array}$$

$$y_{\min} = y(-1) = y(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$y_{\max} = y(0) = 3$$

$$y'' = 12x^2 - 4 = 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \cup & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \cap & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cup \end{array}$$

Точки перегиба:

$$y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - 2\frac{1}{3} + 3 = \frac{1-6+27}{9} = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\frac{4}{9}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\frac{4}{9}\right).$$

4.Провести полное исследование функции построить ее график

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

1.Область определения

$x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$.

2. Четность

$y(-x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{-x - 1} \Rightarrow$ функция общего вида.

3. Мотонность

$$y' = \frac{(2x-1)(x-1) - 1\cdot(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & - & & + \\ & 0 & & 1 & & 2 & \end{array}$$

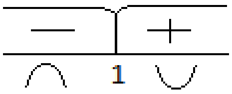
$$y_{\max} = y(0) = -1$$

$$y_{\min} = y(2) = \frac{4-2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

4.Выпуклость

$$y' = \frac{(2x-1)(x-1)^2 - 2\cdot(x-1)(x^2 - 2x)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left((2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x)\right)}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$



Перегиба нет т.к. в (.) x=1 разрыв.

5. Асимптоты:

а) $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = \dfrac{1}{-0} = -\infty,$

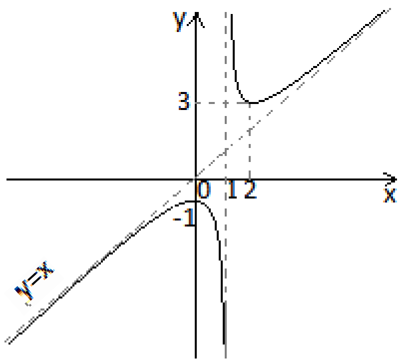
$\lim\limits_{x\to 1+0} y(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = \dfrac{1}{+0} = +\infty \Rightarrow x=1$ -вертикальная асимптота.

б) Наклонную асимптоту ищем в виде y=kx+b

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x(x-1)} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(y(x)-kx\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

Наклонная асимптота y=x. График функции имеет вид:



Вариант 2.

1.Составить уравнение нормали и касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

$y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32; \quad x_0 = 4.$

$y(x_0) = 16 + 16 - 32 = 0$

$y' = 2x + 8\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'(x_0) = 8 + \dfrac{8}{4} = 10$

Уравнения касательной

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = 0 + 10(x - 4)$$
$$y = 10x - 40$$

Уравнение нормали

$$y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}\left(x - x_0\right)$$
$$y = 0 - \frac{1}{10}\left(x - 4\right)$$
$$y = -\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}.$$

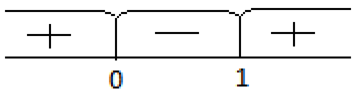
2.Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+7x+3x^4}{x^3-5x+6} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7+12x^3}{3x^2-5} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{36x^2}{6x} = \lim\limits_{x\to\infty} 6x = \infty$

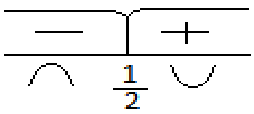
б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-1}{\sin \pi x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}}{\pi \cos \pi x} = \dfrac{1}{-\pi} = -\dfrac{1}{\pi}$

3.Исследовать функцию на экстремум и перегиб:

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ 

$$y_{max} = y(0) = 4$$
$$y_{min} = y(1) = 2 - 3 + 4 = 3$$

$y'' = 12x - 6 = 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ 

Точка перегиба:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 = \frac{2-6+32}{8} = \frac{34-6}{8} = \frac{28}{8} = 3{,}5$$

4.Провести полное исследование функции построить ее график

$$y = \frac{x^2-5}{x+3}$$

1.Область определения

$x + 3 \neq 0 \ x \neq 3$

2. Четность

$y(-x) = \dfrac{x^2-5}{-x+3} \Rightarrow$ функция общего вида.

3. Монотонность

$$y' = \frac{2x(x+3)-1(x^2-5)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2+5}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$$

+	-5	—	-3	—	-1	+

$$y_{\max} = y(-5) = \frac{25-5}{-5+3} = \frac{20}{-2} = -10$$

$$y_{\min} = y(-1) = \frac{1-5}{-1+3} = \frac{-4}{2} = -2$$

В (.) x=-3 функция терпит разрыв.

4. Выпуклость

$$y'' = \frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x+3)(x^2+6x+5)}{(x+3)^4} = \frac{2(x+3)(x^2+6x+9-x^2-6x-5)}{(x+3)^4} = \frac{8}{(x+3)^3}$$

—	-3	+
∩		∪

5. Асимптоты:

а)

$$\lim_{x\to 3-0} y(x) = \lim_{x\to 3-0} \frac{x^2-5}{x+3} = \frac{4}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3+0} y(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{x^2-5}{x+3} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

x=3 –вертикальная асимптота.

б) y=kx+b

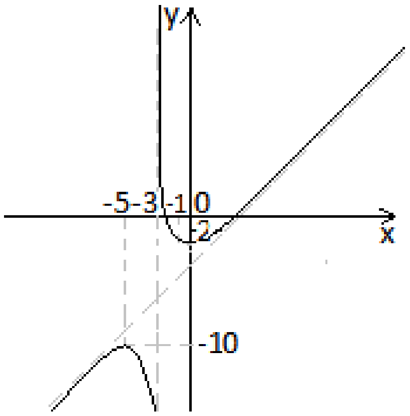
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5}{x^2+3x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(y(x)-kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-5}{x+3}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-5-x^2-3x}{x+3}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x-5}{x+3} = -3$$

Наклонная асимптота

y=x-3

График функции имеет вид:



Критерии оценки контрольной работы(1 ч.):

Наличие 3-4 ошибок	3
Наличие 1-2 ошибок вычислительного характера	4
Правильно решенные все задания	5

РАЗДЕЛ №2: «Функции нескольких переменных»

Контрольная работа (6КР, 5б.)

Вариант 1

1) Найти частные производные функции двух переменных:

$z = 4 - \ln 3x + \arccos x \cdot y^3 + \sqrt[3]{x}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3x}3 - y^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{x} - \frac{y^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\arccos x \cdot y^2$

2) Найти частные производные 1-го и 2-го порядков:

$z=11-x+y^3-xy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 - y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y$.

3) Найти указанные производные сложных функций

$z=e^{x-2y}, x=5\cos t, y=\ln(3t-1).$ Найти $\frac{dz}{dt}.$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y} \cdot 1; \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-2y} \cdot (-2); \ \frac{\partial x}{\partial t} = -5\sin t; \ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{3t-1} \cdot 3;$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-2y}\cdot(-5)\sin t-2e^{x-2y}\cdot\frac{3}{3t-1}.$$

4) Исследовать функцию на экстремум: $z=6x^2-3y^2+7xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=12x+7y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-6y+7x$$

Найдем точки, подозрительные на экстремум, из условия

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\quad \begin{cases}12x+7y=0\\ 7x-6y=0\end{cases}\left|\begin{array}{l}\cdot 6\\ \cdot 7\end{array}\right.\qquad \begin{cases}72x+42y=0\\ 49x-42y=0\end{cases}$$

121x=0

X=0 7y=0 y=0.

P(0,0)-точка, подозрительная на экстремум.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=7\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6$$

$AC-B^2=-72-49<0\Rightarrow$ экстремума в (.)P нет.

Вариант 2.

1) Найти частные производные функции двух переменных:

$z=\cos 3x-8+\ln 2x\cdot 4^x-y^{10}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-3\sin 3x+\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot 4^x+\ln 2x\cdot 4^x\ln 4=-3\sin 3x+\frac{1}{x}\cdot 4^x+\ln 4\cdot\ln 2x\cdot 4^x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-10y^9$$

2)Найти частные производные первого и второго порядков

$z=2xy+y-x^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2y-4x^3\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x+1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-12x^2\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

3) Найти $\frac{\partial z}{\partial U}$ и $\frac{\partial z}{\partial V}$ для функции $z=\cos\left(x^2y\right)$, если $x=e^4+2V;\ \ y=\ln(U+V)$

$$\frac{\partial z}{\partial U}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial U};\ \frac{\partial z}{\partial V}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial V}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial V}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin\left(x^2y\right)\cdot y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\sin\left(x^2y\right)\cdot x^2;$$

$$\frac{\partial x}{\partial U}=e^U\ \frac{\partial x}{\partial V}=2$$

$$\frac{\partial y}{\partial U}=\frac{1}{U+V}\ \frac{\partial y}{\partial V}=\frac{1}{U+V}$$

$$\frac{\partial z}{\partial U}=-y\sin\left(x^2y\right)\cdot e^U-x^2\sin\left(x^2y\right)\cdot\frac{1}{U+V}$$
$$\frac{\partial z}{\partial V}=-2y\sin\left(x^2y\right)-x^2\sin\left(x^2y\right)\cdot\frac{1}{U+V}$$

4.Исследовать функцию на экстремум: $z=10+xy-2y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x-4y$$

Найдем точки, подозрительные на экстремум, из условия

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=0\\ x-4y=0\end{cases}$$

y=0 x=0

P(0,0)-точка, подозрительная на экстремум.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4$$

$AC-B^2=0-1=-1<0\Rightarrow$ экстремума в (.)Р нет.

Критерии оценки контрольной работы(30мин.):

Правильно решенные 3 задания	3
Правильно решенные 4-5 заданий	4
Правильно решенные6 заданий	5

<u>РАЗДЕЛ №3: «Интегралы»</u>

Контрольная работа (10КР, 5б.)

Вариант 1.

1. $\int\left(4x^6+\frac{3}{x^9}\right)dx=\left(4\frac{x^7}{7}+3\frac{x^{-8}}{-8}\right)=\frac{4}{7}x^7-\frac{3}{8x^8}$

2.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{3\sin x-1}}dx = \left| \begin{matrix} 3\sin x-1=t \\ 3\cos xdx=dt \\ \cos xdx=\frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3\sin x-1)^2} + C$$

3. $$\int (5-3x)\cdot e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} U=5-3x & dU=-3dx \\ dV=e^{2x}dx & V=\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}(5-3x)e^{2x} + \frac{3}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(5-3x)e^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

4. $$\int \frac{2x+1}{x(x-1)(x-2)}dx$$

$$\frac{2x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

2x+1=A(x-1)(x-1)+Bx(x-2)+Cx(x-1)

$$\left. \begin{matrix} x=0 & 1=2A \\ x=1 & 3=-B \\ x=2 & 5=2C \end{matrix} \right\} \begin{matrix} A=\frac{1}{2} \\ B=-3 \\ C=\frac{5}{2} \end{matrix}$$

$$\int \frac{2x+1}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{x-2} \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - 3\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x-2| + C$$

5. $$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+3}{(x+1)^2+2}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \\ x=t-1 \end{matrix} \right| =$$

$x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2;$ $2x+3=2(t-1)-1=2t-2-1=2t-3$

$$= \int \frac{2t-3}{t^2+2}dt = 2\int \frac{t}{t^2+2}dt - 3\int \frac{dt}{t^2+2} = \left| \begin{matrix} t^2+2=p \\ 2tdt=dp \end{matrix} \right| = \int \frac{dp}{p} - 3\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \ln|p| - 3arctg\frac{t}{2} + C = \ln\left|x^2+2x+3\right| - 3arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

6. $\int \cos^3 x \sin^8 x\, dx = \begin{vmatrix} \sin\ x = t \\ \cos\ x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{vmatrix} =$

$= \int (1-t^2) t^8 dt = \int (t^8 - t^{10}) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} + C$

7. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} dx = \begin{vmatrix} x-1 = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x+2 = t^2+3 \end{vmatrix} =$

$= 2\int \frac{(t^2+3)tdt}{t} = 2\int (t^2+3)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + 3t\right) + C =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 6\sqrt{x-1} + C$

Вариант 2.

1.Вычислить интегралы

Решение:

1. $\int \left(3x^4 + \frac{2}{x^6}\right) dx = \int (3x^4 - 2x^{-6}) dx = 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{3}{5}x^5 + \frac{2}{5x^5} + C$

2. $\int (x^6-1)^9 \cdot x^5 dx = \begin{vmatrix} x^6 - 1 = t \\ 6x^5 dx = dt \\ x^5 dx = \frac{1}{6}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\int t^9 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{10}}{10} + C = \frac{1}{60}(x^6-1)^{10} + C$

3. $\int (4x+3)\cos dx = \begin{vmatrix} U = 4x+3 & dU = 4dx \\ dV = \cos x dx & V = \sin x \end{vmatrix} = (4x+3)\sin x - 4\int \sin x dx =$

$= (4x+3)\sin x + 4\cos x + C$

4. $\int \frac{x^2+3}{x(x-2)(x+3)} dx$

$\frac{x^2+3}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$

$x^2 + 3 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$

$$\left.\begin{array}{l|l} x = 0 & 3 = -6A \\ x = 2 & 7 = 30B \\ x = -3 & 12 = 15C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{7}{30} \\ C = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \end{array}$$

$$\int\frac{x^2+3}{x(x-2)(x+3)}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{7}{30}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{7}{30}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+C$$

5. $$\int\frac{3x\ \ +4}{x^2-6x+7}dx=\int\frac{3x\ \ +4}{(x-3)^2-2}dx=\left|\begin{matrix}x-3=t\ \ 3x+4=3t+13\\ dx=dt\\ x=t+3\end{matrix}\right|=$$

$$x^2-6x+7=x^2-2\cdot 3x+9-2=(x-3)-2$$

$$=\int\frac{3t\ \ +13}{t^2-2}dt=3\int\frac{tdt}{t^2-2}+13\int\frac{dt}{t^2-2}=$$

$$=\left|\begin{matrix}t^2-2=p\\ 2tdt=dp\\ tdt=\frac{1}{2}dp\end{matrix}\right|=\frac{3}{2}\int\frac{dp}{p}+13\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{3}{2}\ln|p|+13\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+7\right|+13\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{2}}{x-3+\sqrt{2}}\right|+C$$

6. $$\int\sin^3 x\cos^8 xdx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin dx=-dt\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2\end{matrix}\right|=-\int\left(1-t^2\right)t^8dt=-\int\left(t^8-t^{10}\right)dt=$$

$$=-\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^{11}}{11}\right)+C=-\frac{1}{9}\cos^9 x+\frac{1}{11}\cos^{11}x+C$$

7. $$\int\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}dx=\left|\begin{matrix}x+1=t^2\\ dx=2tdt\\ x=t^2-1\\ x-2=t^2-3\end{matrix}\right|=2\int\frac{\left(t^2-3\right)tdt}{t}=2\int\left(t^2-3\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-3t\right)+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-6\cdot\sqrt{x+1}+C$$

Критерии оценки контрольной работы (45мин.):

Правильно решенные 4 задания	3
Правильно решенные 5 заданий	4
Правильно решенные 6 заданий	5

Тест (12 ИТ, 5б)

1. Интеграл $\int x\sin xdx$ равен:

1) $-x\cos x+\sin x+c$ 2) $x\cos x-\sin x+c$

3) $-x\cos x+\sin x$ 4) $x\cos x+\sin x+c$

2. Значение интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$ равно:

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) $\ln\frac{3}{4}$ 4) $\ln\frac{4}{3}$

3. С помощью какого метода вычисляется интеграл $\int \frac{1}{\sin x - \cos x}dx$?

1) по частям

2) универсальной тригонометрической подстановки $t == tg\frac{x}{2}$

3) непосредственного интегрирования
4) разложением на сумму простейших дробей

4. С помощью какого метода вычисляется интеграл $\int \frac{1}{x^2 + x + 1}dx$?

1) необходимо выделить полный квадрат из квадратного трехчлена
2) непосредственного интегрирования
3) по частям
4) универсальной тригонометрической подстановки $t == tg\frac{x}{2}$

5. Неопределенный интеграл – это…
1) первообразная подынтегральной функции
2) множество всех первообразных подынтегральной функции
3) число
4) вектор

6. Если $F(x)$ - первообразная, то неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ равен:
1) $F(x)$ 2) $f(x)$ $F(x)+x^2$ 3) $F(x)+c$ 4) $F(b)-F(a)$

7. Определенный интеграл – это…

1) первообразная подынтегральной функции
2) множество всех первообразных подынтегральной функции
3) число
4) вектор

8. Значение интеграла $\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$ равно:

1) 1 2) 0 3) $-\frac{2}{3}$ 4) правильного ответа нет

9. Значение интеграла $\int_{0}^{\pi/2} \cos 2x dx$ равно:

1) 1 2) 0 3) 2 4) π

10. Интеграл $\int e^{-3x} dx$ равен:

1) $-3e^{-3x} + c$ 2) $\dfrac{e^{-3x}}{-3}$ 3) $\dfrac{e^{-3x}}{-3} + c$ 4) $-3xe^{-3x} + c$

Ключи к ответу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	2	1	2	3	3	4	2	3

Время выполнения: 45 мин
Критерии оценивания: 10 заданий -5 баллов
8-9 заданий – 4 балла
6-7 заданий – 3 балла

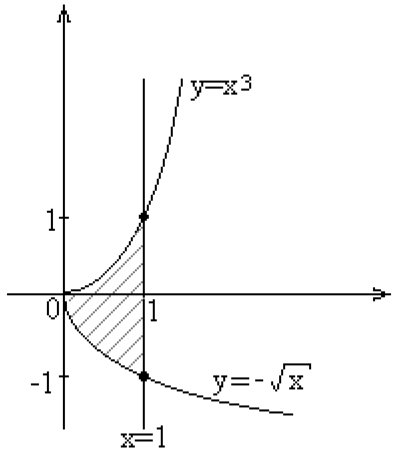
РАЗДЕЛ №4: «Кратные и криволинейные интегралы»

Контрольная работа (16КР, 5б.)

Вариант 1

1).Вычислить $\iint\limits_{D} (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dxdy$, где
D: $x = 1, \;\; y = x^3, \;\; y = -\sqrt{x}$.

Решение. Изобразим область D:



Тогда область D задается системой неравенств D: $0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x} \le y \le x^3$.

Получаем $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)dy$.

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (54x^2y^2 + 150x^4y^4)dy = (18x^2y^3 + 30x^4y^5)\Big|_{-\sqrt{x}}^{x^3} =$$

$$= 18x^2x^9 + 30x^4x^{15} - 18x^2(-x^{3/2}) - 30x^4(-x^{5/2}) =$$

$$= 18x^{11} + 30x^{19} + 18x^{7/2} + 30x^{13/2}.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int\limits_0^1 (18x^{11} + 30x^{19} + 18x^{7/2} + 30x^{13/2})dx = \left(\frac{3}{2}x^{12} + \frac{3}{2}x^{20} + 4x^{9/2} + 4x^{15/2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4 + 4 = 11.$$

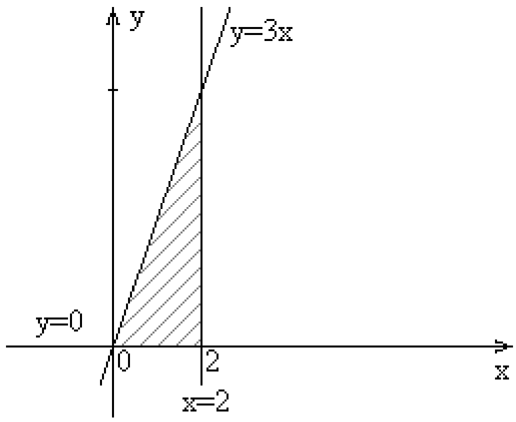
Ответ. I=11.

2) Вычислить $\iiint\limits_V x^2 z\,dxdydz$,

V: $y = 3x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0$.

Решение. $z = 0$ — плоскость Oxy, ограничивающая область V снизу. $z = xy$ — гиперболический параболоид, ограничивающий область сверху. $y = 3x$ — плоскость, проходящая через ось Oz. $y = 0$ — плоскость Oxz. $x = 2$ — плоскость, параллельная плоскости Oyz.

Спроектируем область V на плоскость Oxy и изобразим область D:



Тогда область V задается системой неравенств: $0 \le z \le xy,\ 0 \le y \le 3x,\ 0 \le x \le 2$.

Таким образом, $I = \int_0^2 dx \int_0^{3x} dy \int_0^{xy} x^2 z\, dz$.

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{xy} x^2 z\, dz = x^2 \int_0^{xy} z\, dz = x^2 \cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{xy} = \frac{x^2}{2} \cdot (xy)^2 = \frac{1}{2} x^4 y^2.$$

Вычислим средний интеграл:

$$\int_0^{3x} \frac{1}{2} x^4 y^2 dy = \frac{1}{2} x^4 \int_0^{3x} y^2 dy = \frac{1}{2} x^4 \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{3x} = \frac{1}{6} x^4 \cdot y^3\Big|_0^{3x} = \frac{1}{6} x^4 \cdot (3x)^3 = \frac{9}{2} x^7.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int_0^2 \frac{9}{2} x^7 dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{x^8}{8}\Bigg|_0^2 = \frac{9}{2} \cdot 2^8 = 144.$$

Ответ. I=144.

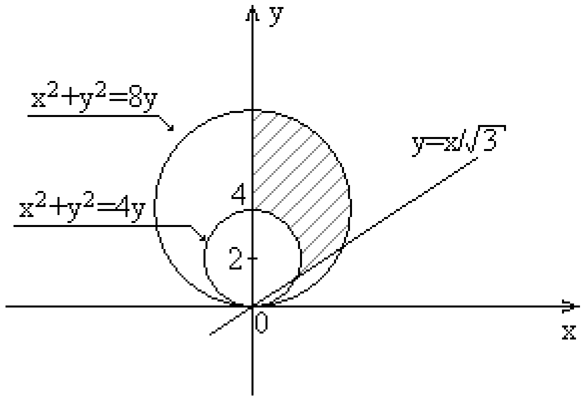
3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ x = 0$.

Решение. $y^2 - 4y + x^2 = 0$: $x^2 + (y-2)^2 = 4$ — окружность с центром в точке (0,2) и радиусом R=2;

$y^2 - 8y + x^2 = 0$: $x^2 + (y-4)^2 = 16$ — окружность с центром в точке (0,4) и радиусом R=4;

$y = x/\sqrt{3}$ — прямая, $x = 0$ — ось Oy.

Изобразим область D:



Так как область D ограничена окружностями и лучами, то площадь будем вычислять в полярных координатах: $S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi\cdot$

Найдем уравнения окружностей в полярных координатах:

$x^2+y^2=4y:\quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\sin\varphi;$

$\rho^2=4\rho\sin\varphi;\ \rho_1=4\sin\varphi;$

$x^2+y^2=8y:\quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=8\rho\sin\varphi;$

$\rho^2=8\rho\sin\varphi;\ \rho_2=8\sin\varphi 4$

α — угол, образованный осью Ох и прямой $y={x}/{\sqrt{3}},\ \alpha=\frac{\pi}{6};$

β — угол, образованный осями Ох и Оу, $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Так как полюс находится вне области D, то площадь будем вычислять по формуле $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\, d\rho,$

$$S=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}\rho\, d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi}\right)d\varphi==\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}(32\sin^2\varphi-8\sin^2\varphi)d\varphi=$$

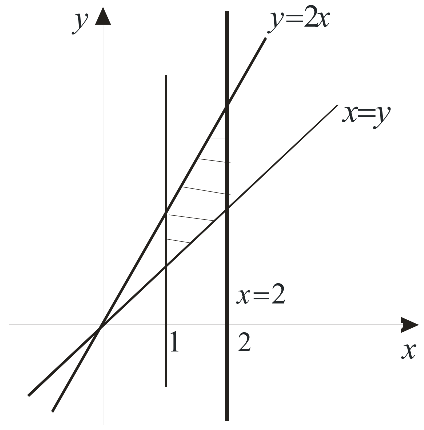
$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}24\sin^2\varphi\, d\varphi==12\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=12\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}=$$

$$=12\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=12\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=4\pi+3\sqrt{3}\cdot$$

Ответ. $S=4\pi+3\sqrt{3}\,(кв.\ ед.)$.

Вариант 2

1) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (xy + y^2)dxdy$, где *D: y=x, y=2x, x=2*.

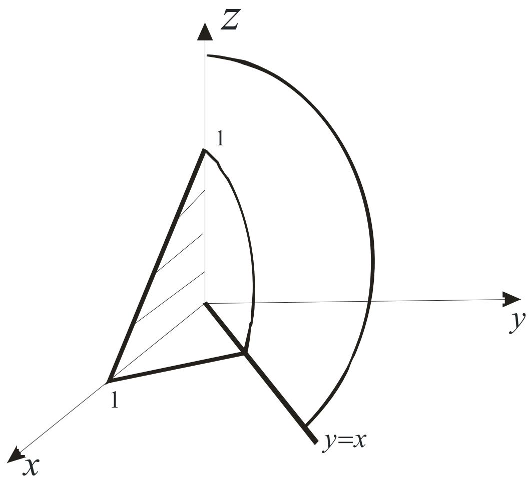


$$\iint\limits_D (xy + y^2)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} (xy + y^2)dy .$$

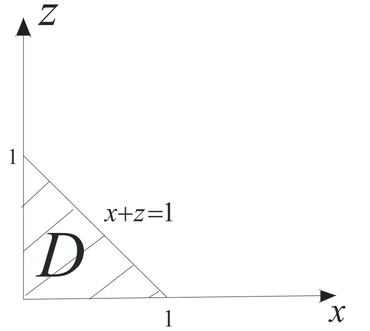
$$\int\limits_x^{2x} (xy + y^2)dy = x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_x^{2x} = x \cdot \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{1}{3}\cdot x^3 = \frac{23}{6}x^3;$$

$$\int\limits_0^2 \frac{23}{6}x^3 dx = \frac{23}{6}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{23}{24}\cdot 16 .$$

2) Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T xdxdydz$, где *T: x=0, y=0, z=0, y=x, x+z=1*.



Спроецируем тело на плоскость *xz*.



$$\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_0^x x\,dy \right) dx\,dz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dx \int\limits_0^x x\,dy .$$

$$\int\limits_0^x x\,dy = xy \Big|_0^x = x^2 ;$$

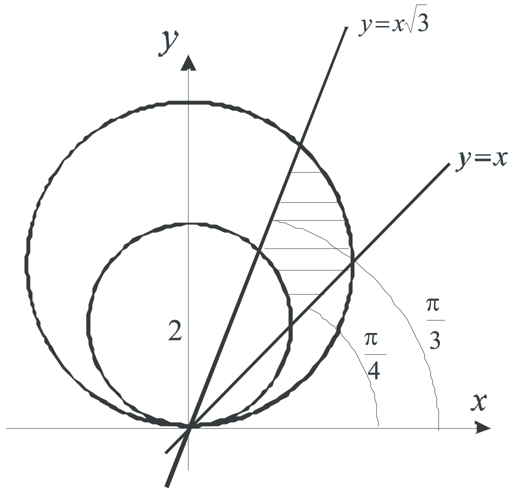
$$\int\limits_0^{1-z} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1-z} = \frac{(1-z)^3}{3} ;$$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{3}(1-z)^3 dz = -\frac{(1-z)^4}{3 \cdot 4} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} .$$

3) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 8y$, $y=x$, $y = x\sqrt{3}$.

$x^2 + y^2 = 4y \;\Rightarrow\; x^2 + (y-2)^2 = 4$.

$x^2 + y^2 = 8y \;\Rightarrow\; x^2 + (y-4)^2 = 16$.



Перейдем к полярным координатам:

$x^2 + y^2 = 4y$: $\quad \rho^2 = 4\rho \sin\varphi, \quad \rho_1 = 4\sin\varphi.$

$x^2 + y^2 = 8y$: $\quad \rho^2 = 8\rho \sin\varphi, \quad \rho_2 = 8\sin\varphi.$

$$S = \iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho\,d\rho .$$

$$\int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho d\rho = \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} = 32\sin^2\varphi - 8\sin^2\varphi = 24\sin^2\varphi\,;$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 24\sin^2\varphi d\varphi = 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\varphi)d\varphi = 12\left.\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 12\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\right).$$

Критерии оценки контрольной работы (1ч.):

Правильно решенное 1 задание	3
Правильно решенные 2 задания	4
Правильно решенные 3 задания	5